On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4(x) - \cos^2(x)$

1° Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que $f''(x) + 16 f(x)$ est constant.

2° En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x$

CORRECTION

1. $f'(x) = -4 \sin x \cos^3 x + 2 \sin x \cos x$

$f'(x) = -4 \sin x \cos^3 x + 2 \sin x \cos x$

$f''(x) = -4 [\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x] + 2 [\cos^2 x - \sin^2 x]$

$f''(x) = -4 \cos^4 x + 12 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$f''(x) = -4 \cos^4 x + 12 (1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 (1 - \cos^2 x)$

$f''(x) = -4 \cos^4 x + 12 \cos^2 x - 12 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 2 + 2 \cos^2 x$

$f''(x) = -16 \cos^4 x + 16 \cos^2 x - 2$

$f''(x) = -16 [\cos^4 x - \cos^2 x] - 2$

$f''(x) = -16 f(x) - 2$ donc pour tout x réel : $f''(x) + 16 f(x) = -2$

2° $16 I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2 - f''(x)]\, \mathrm{d}x$

$16 I = \left[-2x - f'(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi - f'(\pi) + f'(0)$

$16 I = -\pi$ donc $I = -\dfrac{\pi}{16}$