ENONCE

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}\ \mathrm{e}^{1-x}$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa dérivée. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. <u>Démonstration de cours.</u> Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \to \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (On pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture, pour tout x réel strictement positif, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

   Interpréter graphiquement le résultat.
3. Pour x élément de $]0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, non nul par $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter géométriquement
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *a*. Montrer que F est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F.

2. *a*. Démontrer que, pour tout réel t, positif : $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

b. En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$

c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$,

$$\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4 - (x+3)\,\mathrm{e}^{1-x}$$

d. En déduire que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$

3. On note; pour tout entier naturel n non nul; S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite.
   Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.
   Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

CORRECTION

Partie A

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ de plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{1-x} + \sqrt{x}\,(-\mathrm{e}^{1-x}) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{1-x}$

4.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

Partie B

1. f est une fonction positive sur $[0 ; +\infty[$ donc u_n mesure l'aire du domaine plan limité par les droites d'équation $x = n$, $x = n + 1$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

2. $n \geq 1$ donc f est décroissante sur $[1 ; +\infty[$
donc pour tout t de $[n ; n + 1]$, $f(n + 1) \leq f(t) \leq f(n)$.
les fonctions étant continues, et $n + 1 \geq n$, on a :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \text{ soit } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

3. Pour tout n non nul, $f(n + 1) \leq u_n \leq f(n)$ donc $f(n + 2) \leq u_{n+1} \leq f(n + 1)$.
donc $u_{n+1} \leq f(n + 1) \leq u_n$ donc $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.
4. u_n mesure une aire donc $u_n \geq 0$ de plus (u_n) est décroissante donc (u_n) converge.
$f(n + 1) \leq u_n \leq f(n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n + 1) = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Partie C

1. *a.* f est continue sur $[0 ; +\infty[$ donc F est la primitive nulle en 1 de f et $F'(x) = f(x)$
b. f est positive sur $[0 ; +\infty[$ donc F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. *a.* $\left(\sqrt{2} - \sqrt{t}\right)^2 = t + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

donc $t + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{t} \geq 0$ donc $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

b. $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$ donc $\sqrt{t} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(t + 2)$

donc $\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{1-t} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(t + 2)\,\mathrm{e}^{1-t}$

ces fonctions étant continues sur $[1, +\infty[$

donc $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}\,\mathrm{d}t$

c. Soit $u'(x) = \mathrm{e}^{1-t}$ donc $u(t) = -\mathrm{e}^{1-t}$
$v(t) = t + 2$ donc $v'(t) = 1$

$$\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = -(x+2)\,\mathrm{e}^{1-x} + 3 - \left[\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x$$

$$\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = -(x+2)\,\mathrm{e}^{1-x} + 3 - (\mathrm{e}^{1-x} - 1)$$

$$\int_1^x (t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4 - (x+3)\,\mathrm{e}^{1-x}$$

d. f est positive sur $[0 ; +\infty[$ et $x \geq 1$ donc $0 \leq F(x)$
$x \geq 1$ et $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ donc $4 - (x + 3)\,e^{1-x} \leq 4$

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

donc $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[4 - (x+3)\,e^{1-x}\right] \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times 4$

donc $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$

3. $S_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles

$S_{n+1} - S_n = u_n$ donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ donc (S_n) est croissante
$S_n = F(n)$ donc $0 \leq S_n \leq \sqrt{2}$ donc (S_n) est une suite croissante majorée donc convergente.