Nouvelle-Calédonie novembre 2009

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. *a*. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $\mathrm{I}(a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Donner selon les valeurs de a le signe de I (a).

b. À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a : $\mathrm{I}(a) = 2 - 2\mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

c. En déduire pour tout nombre réel a : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{a}\,\mathrm{I}(a) = \mathrm{e}^{a} - \left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

3. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

On note C la courbe représentative de g et P celle de h.

a. Montrer que les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes C et P.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

– T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

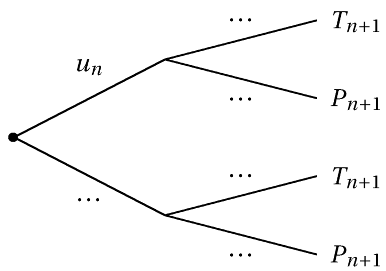
– P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = p(\mathrm{T}_n)$ où $p(\mathrm{T}_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. *a*. Donner les valeurs des probabilités $p(\mathrm{T}_1)$, $p(\mathrm{P}_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{T}_1}(\mathrm{T}_2)$, $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{T}_2)$

b. Montrer que $p(\mathrm{T}_2) = \dfrac{1}{4}$.

c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



d. Démontrer que pour tout entier $n > 1$, $u_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}2$.

e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n - \dfrac{2}{9}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. *e*. ?

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.

En déduire une solution particulière (x_0 ; y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).

Démontrer que si (x ; y) est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3. *a*. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\ ; 1\ ; 0\right)$.

c. Placer le point R sur la figure.

4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

5. *a*. Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b. Soit S la sphère de centre G passant par F. Justifier que la sphère S et le plan (IJK) sont sécants. Déterminer le rayon de leur intersection.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$.

1. *a*. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

c. Déterminer la nature du triangle OAB.

2. On note *r* la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe *z*, on note M′ l'image de M par *r* et z' l'affixe du point M′.

a. Calculer un argument du quotient $\frac{z_A}{z_B}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. En déduire l'écriture complexe de la rotation *r*.

3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.

Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.

a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation *r* .

b. Calculer l'affixe z_I du milieu I de [AB].

c. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

d. En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est : $z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i$.

4. Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.

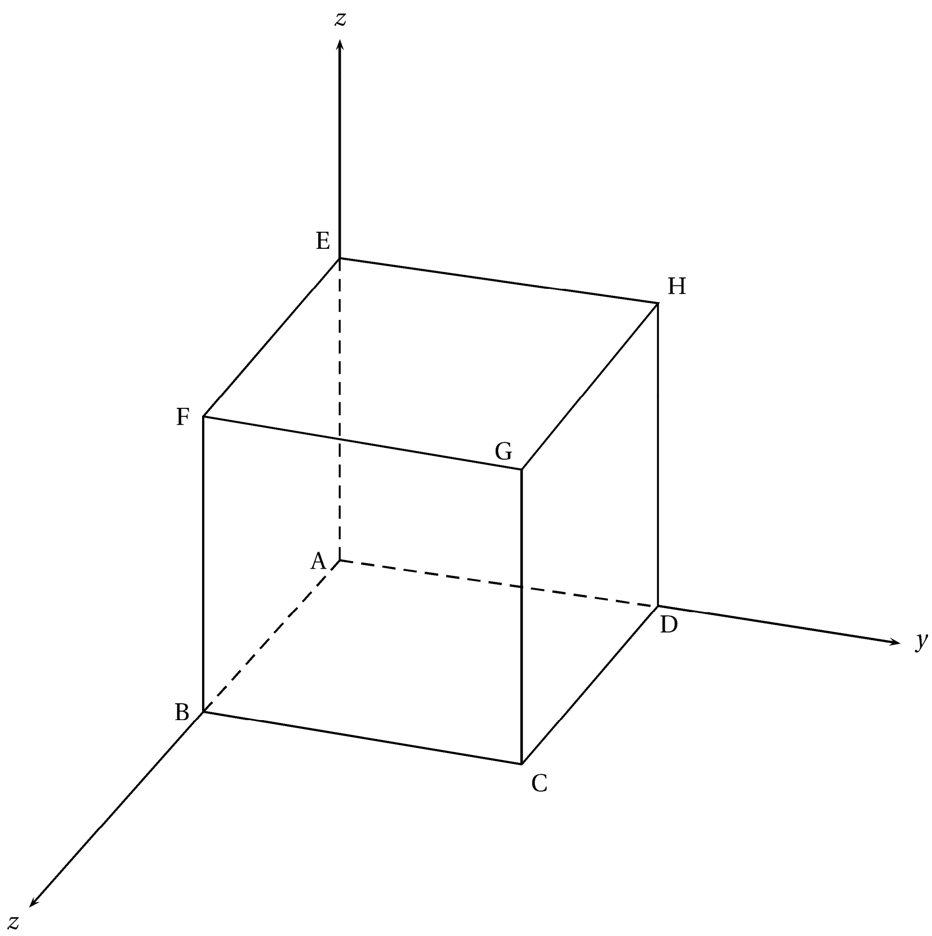
a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

b. Placer D′ image de D par la rotation *r* définie à la question 2.

On note $z_{D'}$ l'affixe de D'. Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

ANNEXE



CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1\. *a*. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b. $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x) e^{-x}$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x(2-x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

c. f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 0]$
f est croissante sur $[0 ; 2]$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$
f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$

Pour tout x réel, $f(x) \geq 0$

2\. *a*. f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f(x) \geq 0$ donc si $a \geq 0$ alors $\mathrm{I}(a) \geq 0$
f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f(x) \geq 0$ donc si $a \leq 0$ alors $\mathrm{I}(a) \leq 0$

b. $u'(x) = e^{-x}$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = x^2$ donc $v'(x) = 2x$

donc $\mathrm{I}(a) = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -2x e^{-x}\,dx = -a^2 e^{-a} + 2\int_0^a x e^{-x}\,dx$

de même si $u'(x) = e^{-x}$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

$\int_0^a x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-x}\,dx = -a e^{-a} - \left[e^{-x}\right]_0^a = -a e^{-a} - e^{-a} + 1 = -e^{-a}(1+a) + 1$

$\mathrm{I}(a) = -a^2 e^{-a} - 2e^{-a}(1+a) + 2 = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

c. Pour tout nombre réel a : $\mathrm{I}(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$ donc $e^a\,\mathrm{I}(a) = 2e^a - 2\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$

donc pour tout nombre réel a : $\dfrac{1}{2} e^a\,\mathrm{I}(a) = e^a - \left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

3\. *a*. $g'(x) = e^x$ donc la tangente à C au point d'abscisse 0 est la droite passant par A $(0 ; 1)$ de coefficient directeur $g'(0) = 1$
$h'(x) = 1 + x$ donc la tangente à P au point d'abscisse 0 est la droite passant par A $(0 ; 1)$ de coefficient directeur $h'(0) = 1$
Les deux tangentes passent par le même point et ont le même coefficient directeur donc sont confondues.
les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. $g(x) - h(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ d'après la question 2. *c*. $g(x) - h(x) = 2\,\mathrm{I}(x)$ or

si $x \geq 0$ alors $\mathrm{I}(x) \geq 0$ donc si $x \geq 0$, $g(x) - h(x) \geq 0$ donc C est au dessus de P sur $[0 ; +\infty[$
si $x \leq 0$ alors $\mathrm{I}(x) \leq 0$ donc si $x \leq 0$, $g(x) - h(x) \leq 0$ donc C est en dessous de P sur $]-\infty ; 0]$.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

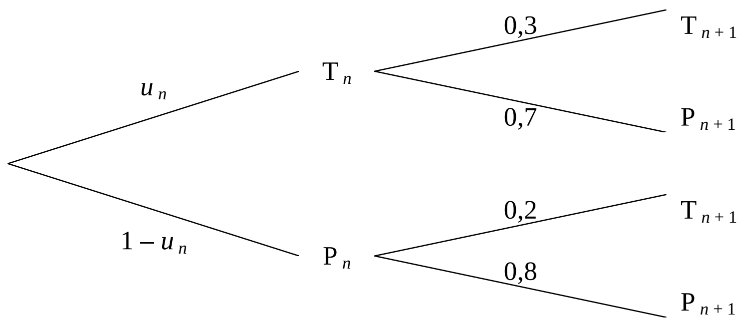
1. *a*. Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis donc $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$
si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3 donc $p_{T_1}(T_2) = 0,3$

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 donc $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$

b. d'après la formule des probabilités totale : $p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap P_1) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2)$

$p(T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,25 = \dfrac{1}{4}$

c.



d. $P(T_{n+1}) = P(T_{n+1} \cap T_n) + P(T_{n+1} \cap P_n) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2$ donc $u_{n+1} = 0,1\, u_n + 0,2$.

e. La limite quand n tend vers $+\infty$ de (u_n) semble être $\dfrac{2}{9}$

2. *a*. $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9} = 0,1\, u_n + 0,2 - \dfrac{2}{9} = 0,1\, u_n - \dfrac{1}{45} = \dfrac{1}{10}\left(u_n - \dfrac{2}{9}\right)$

donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{10} v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ de premier terme $\dfrac{5}{18}$.

b. $v_n = q^{n-1} v_1 = 0,1^{n-1} \times \dfrac{5}{18}$ donc $u_n = v_n + \dfrac{2}{9} = 0,1^{n-1} \times \dfrac{5}{18} + \dfrac{2}{9}$

c. $-1 < 0,1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ donc la limite de la suite (u_n) est $\dfrac{2}{9}$. Ce résultat permet de valider la conjecture émise en 1. *e*.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. *a*. $7 - 2 \times 3 = 1$ donc $u = -2$ et $v = 1$ sont solutions de $3u + 7v = 1$.
$7 \times 10^{2n} - 2 \times 3 \times 10^{2n} = 10^{2n}$ donc une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E) est $(-2 \times 10^{2n} ; 10^{2n})$

b. $3x + 7y = 10^{2n}$ et $7 \times 10^{2n} - 2 \times 3 \times 10^{2n} = 10^{2n}$ donc par différence membre à membre :
$3(x + 2 \times 10^{2n}) + 7(y - 10^{2n}) = 0$ soit $3(x + 2 \times 10^{2n}) = -7(y - 10^{2n})$
donc 3 divise $-7(y - 10^{2n})$; 3 et 7 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y - 10^{2n}$
Il existe un entier relatif k tel que $y - 10^{2n} = 3k$ soit $y = 3k + 10^{2n}$ donc en remplaçant dans $3(x + 2 \times 10^{2n}) = -7(y - 10^{2n})$ alors $x = -7k - 2 \times 10^{2n}$
Vérification :
$3(-7k - 2 \times 10^{2n}) + 7(3k + 10^{2n}) = -6 \times 10^{2n} + 7 \times 10^{2n} = 10^{2n}$
Les solutions de (E) sont donc les couples de la forme $(-7k - 2 \times 10^{2n} ; 3k + 10^{2n})$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. *a*. $100 - 2 = 98 = 7 \times 14$ donc $100 \equiv 2$ (modulo 7).
si $(x ; y)$ est solution de (G) alors $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ or $7y^2 \equiv 0$ (modulo 7) et $10^{2n} = 100^n$ donc $10^{2n} \equiv 2^n$ (modulo 7).
donc si $(x ; y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Si $x = 2$ alors $3x^2 = 12$ or $12 = 7 + 5$ donc $3x^2 \equiv 5$ (7)

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3

c. $2^3 = 8$ donc $2^3 \equiv 1$ (modulo 7) donc $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7) ; $2^{3k+1} \equiv 2$ (modulo 7) ; $2^{3k+2} \equiv 4$ (modulo 7)
Dans la division par 3 d'un entier n, il existe deux entiers k et r tel que $n = 3k + r$ avec $r \in \{0 ; 1 ; 2\}$ donc pour tout entier n, 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
$3x^2$ n'est jamais congru à 1, 2 ou 4 modulo 7, donc on ne peut jamais avoir $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
L'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1. B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) et C (1 ; 1 ; 0) donc I a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$

B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) et F (1 ; 0 ; 1) donc J a pour coordonnées $\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

H a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1) et F (1 ; 0 ; 1) donc K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$

2. $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}\times 2 + 0\times 1 + 1\times 1 = 0$

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IJ} = 0\times 2 - \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 0$ donc le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

Les droites (IJ) et (IK) sont sécantes donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (IJK) donc le plan (IJK) *a* une équation de la forme :

$2x + y + z + d = 0$; I appartient à ce plan donc $2\times 1 + \frac{1}{2} + 0 + d = 0$ soit $d = -\frac{5}{2}$

Une équation du plan (IJK) est : $2x + y + z + -\frac{5}{2} = 0$ ou encore $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3. *a*. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (CD). M $\in$ (CD) si et seulement si il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{CM} = k\,\overrightarrow{AB}$

soit $\begin{cases} x-1=k \\ y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ donc un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est $\begin{cases} x=k+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;1\,;0\right)$.

R appartient à (CD) donc les coordonnées de R sont de la forme $\begin{cases} x=k+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ avec *k* réel.

R appartient au plan (IJK) donc les coordonnées de R vérifient $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

donc $4(k+1) + 2\times 1 + 2\times 0 - 5 = 0$ donc $k = -\frac{1}{4}$

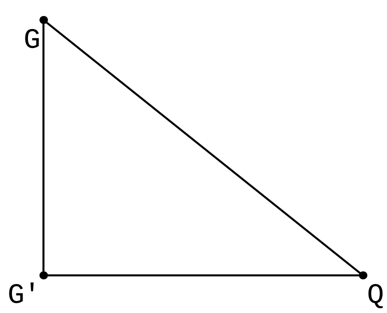
les coordonnées de R sont $\begin{cases} x=-\frac{1}{4}+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

donc R est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;1\,;0\right)$.

4. I appartient à (BC) et J appartient à (BF) donc le plan (IJK) coupe la face (BCFG) du cube suivant la droite (IJ)
J appartient à (BF) et R appartient à (CD) donc le plan (IJK) coupe la face (ABCD) du cube suivant la droite (JR)
Les faces (ABCD) et (EFGH) du cube sont parallèles donc le plan (IJK) les coupe suivant deux droites parallèles donc coupe (EFGH) suivant la parallèle en K à (JR).
Soit M le point d'intersection de cette droite avec (GH) et L le point d'intersection de cette droite avec (EF)
Le plan (IJK) coupe la face ((ABEF) suivant (IL) et la face (CDHG) suivant (MR) d'où la section du cube par ce plan.

5. *a*. G est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 1) donc la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\frac{|4\times 1+2\times 1+2\times 1-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}}$

$\frac{|4\times 1+2\times 1+2\times 1-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

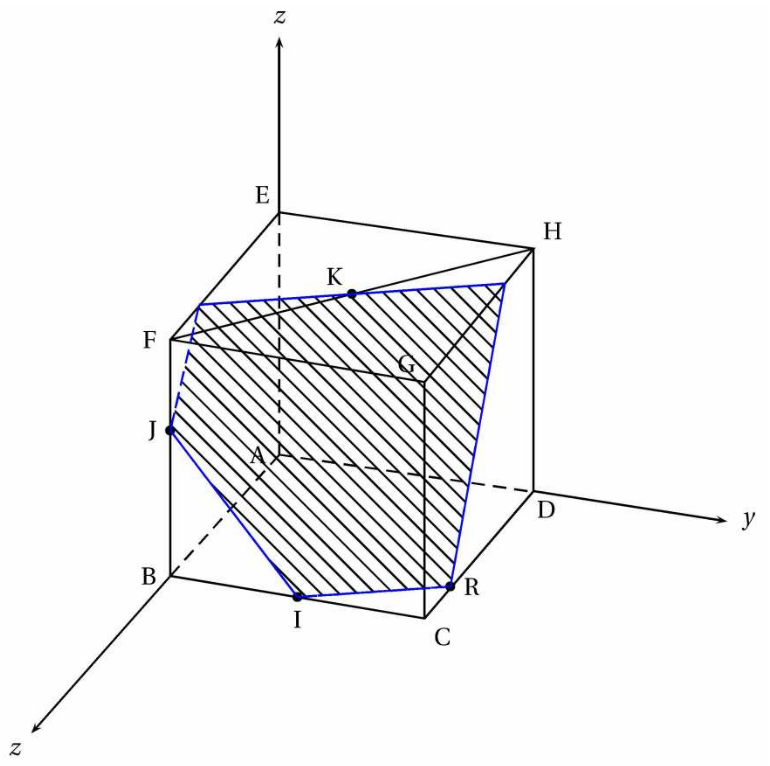


b. S est la sphère de centre G passant par F donc de rayon GF = 1.

$\frac{\sqrt{6}}{4} < 1$ donc la sphère S et le plan (IJK) sont sécants suivant un cercle de centre G' projection orthogonale de G sur le plan (IJK).
Soit Q un point de ce cercle. G'Q est le rayon R du cercle intersection de la sphère et du plan (IJK).
Le triangle GG'Q est un triangle rectangle en G'

donc $GG'^2 + G'Q^2 = GQ^2$ or $GG' = \frac{\sqrt{6}}{4}$ et GQ = 1 (rayon de la sphère)

donc $G'Q^2 = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$ donc $G'Q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ donc $R = \frac{\sqrt{10}}{4}$

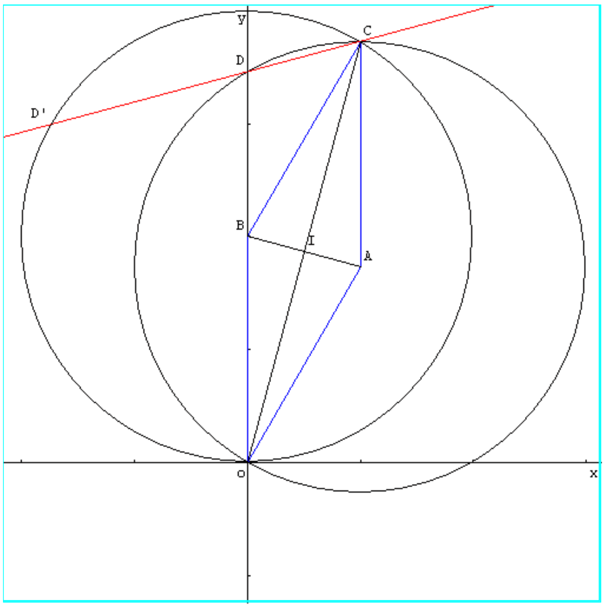


EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

1\. *a.* $|z_A| = 2$ donc $z_A = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + i\sqrt{3}$, donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$z_A = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ de même $z_B = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

b.



c. OA = $|z_A| = 2$ et OB = $|z_B| = 2$ donc OAB est un triangle isocèle en O

2\. *a.* $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ soit $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

b. r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ de centre O donc l'écriture complexe de la rotation r est $z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z$

3\. *a.* Γ est le cercle de centre A de rayon OA = 2, r transforme le cercle Γ en le cercle de centre r(A) = B de même rayon or OB = 2 donc O appartient à $r(\Gamma)$ donc $r(\Gamma) = \Gamma'$.

b. $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B) = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

c. C $\in \Gamma$ donc OA = OC or OA = OB de plus C $\in \Gamma'$ donc OC = OB donc le quadrilatère OACB est un losange

d. le quadrilatère OACB est un losange donc ses diagonales se coupent en leur milieu donc I est le milieu de [OC]

donc $z_I = \dfrac{1}{2} z_C$ donc $z_C = 2\,z_I = 1 + \left(2+\sqrt{3}\right)i$.

4\. *a.* AD = $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$ donc D $\in \Gamma$

b. $z_{D'} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_D = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right)(2i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i$

5\. $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $1 + \left(2+\sqrt{3}\right)i - 2i\sqrt{3} = 1 + (2-\sqrt{3})\,i$

$\overrightarrow{DD'}$ a pour affixe $-\sqrt{3} + 3i - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})\,i = -\sqrt{3}\,[1 + (2-\sqrt{3})\,i]$ donc $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\,\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. Les points C, D, D' sont alignés.