EXERCICE 1 5 points

Partie A

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1. *a.* Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. *a.* Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (D) la droite passant par les points A(1 ; − 2 ; − 1) et B(3 ; − 5 ; − 2).

1 Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}$ (1 ; 1 ; − 1).

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ > 0).

On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leq a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leq a)$ est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$. »

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \dfrac{1+i}{2}a$.

Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M′ ne sont pas alignés. »

EXERCICE 3 5 points Enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment [AB].
Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1 ; 3k - 1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0$ modulo 3, où $(x ; y)$ est un couple d'entiers relatifs.
Proposition 3 : « Il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leq k \leq n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E′) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E′). »

EXERCICE 4 6 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. *a.* Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$.
On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points

Partie A

1. En choisissant $y = -x$: $e^x \times e^y = e^{x+y}$ devient : $e^x \times e^{-x} = e^{x-x}$ soit $e^x \times e^{-x} = e^0$

$e^x \times e^{-x} = 1$ donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Si $n = 0$, $(e^x)^0 = 1 = e^0 = e^{0x}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que pour tout n, la propriété est héréditaire soit que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $(e^x)^n = e^{nx}$ alors $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$

$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$

La propriété est héréditaire pour tout n donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Partie B

1. ***a.*** $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ donc $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$ donc $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

b. la fonction $x \to \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $-\dfrac{u'}{u}$ où $u(x) = 1 + e^{-x}$ donc une primitive de la fonction $x \to \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est la fonction $x \to -\ln(1+e^{-x})$

donc $u_1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) = \ln 2 - \ln(1+e^{-1})$

$u_0 = 1 - u_1 = 1 + \ln(1+e^{-1}) - \ln 2$

2. La fonction $x \to \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $0 < 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \geq 0$ soit pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. ***a.*** $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\right)dx$

$u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{(e^{-x}+1)\,e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1$

$u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ donc $u_n \leq u_{n+1} + u_n$

soit pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$ or pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 2 4 points

1 $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D) et a pour coordonnées (2 ; – 3 ; – 1)

(D) est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ($t \in \mathbb{R}$).

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (x – 1 ; y + 2 ; z + 1) donc $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y+2 = -3t \\ z+1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D') a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 1) (prendre les coefficients de k)

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles, les droites (D) et (D') sont donc soit sécantes soit non coplanaires

Cherchons leur intersection :

M $\in$ (D) $\cap$ (D') $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$. On doit donc résoudre le système en t et k : $\begin{cases} 1+2t = 2-k \\ -2-3t = 1+2k \\ -1-t = k \end{cases}$

si k = – 1 – t alors le système se réduit à $\begin{cases} 1+2t = 2-(-1-t) \\ -2-3t = 1+2(-1-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t = 3+t \\ -2-3t = -1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -1 = t \end{cases}$

ce qui est impossible donc les deux droites ne sont pas coplanaires.

3. *a.* Un point M de (D) a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$,

$4x + y + 5z + 3 = 4(1 + 2t) - 2 - 3t + 5(-1 - t) + 3$

$4x + y + 5z + 3 = 4 + 8t - 2 - 3t - 5 - 5t + 3$

$4x + y + 5z + 3 = 4 - 2 - 5 + 3 + 8t - 3t - 5t = 0$

Tout point M de (D) appartient à (P) donc le plan (P) contient la droite (D).

b. Un point M de (D') a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$,

$4x + y + 5z + 3 = 4(2 - k) + 1 + 2k + 5k + 3$

$4x + y + 5z + 3 = 8 - 4k + 1 + 2k + 5k + 3$

$4x + y + 5z + 3 = 8 + 1 + 3 - 4k + 2k + 5k$

$4x + y + 5z + 3 = 12 + 3k$

Il existe un point unique de (D') appartenant à (P), c'est le point de paramètre k tel que 12 + 3 k = 0 soit k = – 4

Il s'agit donc du point C de coordonnées (6 ; – 7 ; – 4).

4. *a.* Un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D') a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 1)

$\vec{u}\,.\,\vec{w} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

$\overrightarrow{AB}$ de coordonnées (2 ; – 3 ; – 1) est un vecteur directeur de (D)

$\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{w} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ donc les droites (Δ) et (D) sont perpendiculaires.

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 6+k \\ y = -7+k \\ z = -4-k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

M $\in$ (D) $\cap$ (Δ) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 6+k \\ y = -7+k \\ z = -4-k \end{cases}$ Il faut donc résoudre le système en t et k : $\begin{cases} 1+2t = 6+k \\ -2-3t = -7+k \\ -1-t = -4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-k = 5 \\ 3t+k = 5 \\ t-k = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t-k = 3 & (L_3) \\ t = -1 & (L_1 - L_3) \\ 4k = -4 & (L_2 - 3L_3) \end{cases} \Leftrightarrow$ t = 2 et k = – 1

En remplaçant soit t par 2 dans l'équation de (D) soit k par – 1 dans l'équation de (Δ), la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E (5 ; – 8 ; – 3).

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

la boule obtenue est blanche ($p = \dfrac{1}{3}$) ou la boule obtenue n'est pas blanche ($q = \dfrac{2}{3}$)

donc la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches suit une loi binomiale de paramètres $(10\ ;\ \dfrac{1}{3})$

$p(\mathrm{X} = 3) = \binom{10}{3} \times p^3 \times q^{10-3} = 120 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^7$. **Proposition 1 fausse**

2. $p(\mathrm{X} \le a) = \int_0^a \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$p(\mathrm{X} > a) = 1 - p(\mathrm{X} \le a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$p(\mathrm{X} > a) = p(\mathrm{X} \le a) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda a} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **Proposition 2 vraie**

3. $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $z^3 = 8\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -8$

Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors il existe un entier p tel que $n = 3p$ donc $z^{3p} = (z^3)^p = (-8)^p$

donc si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. **Proposition 3 vraie.**

4. $\mathrm{OA}^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$

$\mathrm{OB}^2 = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right|^2 |a|^2 = \dfrac{1}{2}|a|^2 = \dfrac{5}{2}$

$b - a = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}a - a = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}a$ donc $\mathrm{AB}^2 = \left|\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\right|^2 |a|^2 = \dfrac{1}{2}|a|^2 = \dfrac{5}{2}$ donc AB = OB et $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{OA}^2$

Le triangle OAB est rectangle isocèle en B. **Proposition 3 vraie.**

5. $\arg z' = \arg\left(\dfrac{-10}{\bar{z}}\right) + 2k\pi$ donc $\arg z' = \arg(-10) - \arg \bar{z} + 2k\pi$

$\arg z' = \pi + \arg z + 2k\pi$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \pi + (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) + 2k\pi$ soit $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = 2k\pi$

Pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, les points O, M et M' sont alignés

Proposition 5 fausse

EXERCICE 3 5 points Enseignement de spécialité

1. La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ donc $b = i\, a = 1 + 2\,i$

Le point I a pour affixe $z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{3+i}{2}$

<u>A partir de là deux possibilités :</u>

<u>Solution 1</u>

La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe de la forme $z' - z_A = a\,(z - z_A)$ où a est un complexe non nul, soit $z' - 2 + i = a\,(z - (2 - i))$.

Cette similitude transforme I en O donc $-2 + i = a\left(\frac{3+i}{2} - 2 + i\right)$

$-2 + i = a\,\frac{-1+3i}{2}$ donc $a = 2 \times \frac{-2+i}{-1+3i} \Leftrightarrow a = 2 \times \frac{(-2+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = 2\,\frac{2+6i-i+3}{10} = \frac{5+5i}{5}$

$a = 1 + i$ donc la similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)\,z - 1 - 2\,i$.

<u>Solution 2</u>

On pouvait se contenter de vérifier que :

- la transformation avait une écriture complexe de la forme z' = a z + b donc était une similitude directe
- A était invariant par la transformation : = 2 – i + 2 i + 1 – 1 – 2 i = 2 – i donc A est le centre de la similitude
- I était transformé en O : $(1 + i)\left(\frac{3+i}{2}\right) - 1 - 2\,i = \frac{1}{2}(3 + i + 3\,i - 1) - 1 - 2\,i = 0$

Il existe une seul similitude directe transformant un couple de points distincts en un autre couple de points distincts donc la similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)\,z - 1 - 2\,i$.

Proposition 1 vraie.

2. $3 \times (-1) - 5 \times (-1) = -3 + 5 = 2$ donc le couple $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E).

Le couple d'entiers relatifs (x, y) est solution de l'équation (E) : $3\,x - 5\,y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - 5\,y = 2 \\ 3 \times (-1) - 5 \times (-1) = 2 \end{cases}$

par différence membre à membre : $3\,(x + 1) - 5\,(y + 1) = 0$ soit $3\,(x + 1) = 5\,(y + 1)$

3 divise $5\,(y + 1)$, 3 est premier avec 5 donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(y + 1)$

il existe un entier relatif k tel que $y + 1 = 3\,k$

en remplaçant dans $3\,(x + 1) = 5\,(y + 1)$ alors $x + 1 = 5\,k$ donc $x = 5\,k - 1$ et $y = 3\,k - 1$

Vérification : $3\,(5\,k - 1) - 5\,(3\,k - 1) = -3 + 5 = 2$

L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5\,k - 1 ; 3\,k - 1)$ où k est un entier relatif.

Proposition 2 vraie.

3. Un nombre est congru à 0 ; 1 ou 2 modulo 3 donc son carré est congru à 0 ; 1 ou 4 soit 1 modulo 3

x	0	1	2
x^2	0	1	1

y^2 \ x^2	0	1
0	0	1
1	1	2

$x^2 + y^2 \equiv 0$ modulo 3 $\Leftrightarrow x^2 \equiv 0$ modulo 3 et $y^2 \equiv 0$ modulo 3

$\Leftrightarrow x \equiv 0$ modulo 3 et $y \equiv 0$ modulo 3 **Proposition 3 fausse**

4. Soit k un entier naturel compris entre 2 et n, n ! est le produit de tous les entiers compris entre 1 et n, parmi ces entiers figure k donc n ! est divisible par k

Il existe un entier naturel p non nul tel que $n! = k\,p$ donc $n! + k = k\,(p + 1)$

$2 \le k \le n$ donc $k \ne 1$ et $k \ne n!$

le nombre $n! + k$ admet un diviseur k autre que 1 et lui-même donc le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier.

Proposition 4 vraie.

5. $x^2 - 52\,x + 480 = 0$ admet pour solutions $x = 12$ et $x = 40$

Soit d = pgcd $(a ; b)$ et m = PPCM $(a ; b)$

d = pgcd $(a ; b)$ donc il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$ et $m = d\,a'\,b'$ donc $m \ge d$

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E').

On a donc avec les notations précédentes $\begin{cases} d = 12 \\ m = 40 \end{cases}$ soit $\begin{cases} d = 12 \\ d\,a'b' = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 12 \\ 12\,a'b' = 40 \end{cases}$

or 12 ne divise pas 40 donc on ne peut pas avoir deux entiers naturels a' et b' tels que $12\,a'\,b' = 40$ **Proposition 5 fausse**

EXERCICE 4 6 points

Partie A

1. u est définie continue dérivable (somme de fonctions continues et dérivables sur] 0 ; + ∞ [) sur] 0 ; + ∞ [et $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

$x > 0$ donc $u'(x) > 0$ sur] 0 ; + ∞ [donc u est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 2 = -2$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

2. *a.* La fonction u est définie continue strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $u(]0 ; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur] 0 ; + ∞ [.

b. $u(1{,}31) \approx -0{,}014$ et $u(1{,}32) \approx 0{,}02$ donc $1{,}31 \le \alpha \le 1{,}32$

3. u est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $u(\alpha) = 0$ donc

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4. $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

1. Pour dériver $(2 - \ln x)^2$ il faut utiliser, par exemple, que $(u^2)' = 2u'u$ avec $u(x) = 2 - \ln x$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x)\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2\,\dfrac{x^2 - 2 + \ln x}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$

2.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	$+\infty$

Partie C

1. M a pour coordonnées $(x ; \ln x)$ donc $\overrightarrow{MA}$ a pour coordonnées $(-x ; 2 - \ln x)$

$AM^2 = MA^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$ donc la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

2. *a.* Soit la fonction $h : x \to \sqrt{x}$.

$g = h \circ f$ or h est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [donc g et f ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [.

b. g et f ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [, f admet un minimum en α donc g admet également un minimum en α.
$AM = g(x)$ donc la distance AM est minimale en P $(\alpha ; \ln \alpha)$.

c. $f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2$ or $2 - \ln \alpha = \alpha^2$ d'après la question 4. de la partie A donc $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^2(1 + \alpha^2)$
$\alpha > 0$ donc $g(\alpha) = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ donc $AP = g(\alpha) = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $(\alpha ; \ln \alpha - 2)$

La tangente à Γ en P a pour équation $y = \dfrac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha$ donc a pour vecteur directeur $\vec{u}(\alpha ; 1)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = \alpha^2 + \ln \alpha - 2 = u(\alpha) = 0$ donc La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P.