Mathématiques

en

Terminale S

Lycée Pré de Cordy - Sarlat - Dordogne

FH – 2012/2013

J'espère que la postérité me jugera vraiment, non seulement sur les choses que j'ai expliquées, mais aussi sur celles que j'ai intentionnellement omises pour laisser aux autres le plaisir de les découvrir.
René Descartes

Chapitre 1 - Suites

1 Rappels de 1re

1.1 Façons de définir une suite

1. Forme explicite
2. Relation de récurrence

1.2 Suite arithmétique

1. Définition
2. Forme explicite
3. Somme de termes consécutifs

1.3 Suite géométrique

1. Définition
2. Forme explicite
3. Somme de termes consécutifs

1.4 Sens de variations

1. Suite croissante
2. Suite décroissante
3. Suite constante

2 Raisonnement par récurrence

2.1 Énoncé du principe

Pour démontrer qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n à partir du rang n_0 (c'est-à-dire pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$) :

1. on **vérifie** que la propriété est vraie au rang n_0 (autrement dit que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie) ;
2. on **démontre** que la propriété est **héréditaire**, c'est-à-dire que si elle est vraie au rang $p \geqslant n_0$, alors elle est vraie au rang $p+1$ (autrement dit que : $\mathscr{P}_p$ vraie $\Rightarrow \mathscr{P}_{p+1}$ vraie) ;
3. enfin on écrit la conclusion : la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

2.2 Exemple

On veut démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On appelle $\mathscr{P}_n$ la propriété $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et on veut démontrer $\mathscr{P}_n$ ($\forall n \geqslant 1$).

1. On **vérifie** la propriété au rang 1.
   Le membre de gauche de l'égalité vaut 1 ; le membre de droite vaut $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.
   Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
2. On **démontre** l'hérédité : on **suppose** que la propriété est vraie au rang $p \geqslant 1$ (c'est **l'hypothèse de récurrence – HR)** et on va **démontrer** qu'elle est vraie au rang $p+1$.
   $\mathscr{P}_p \Leftrightarrow 1+2+\cdots+p = \dfrac{p(p+1)}{2}$; $\mathscr{P}_{p+1} \Leftrightarrow 1+2+\cdots+p+(p+1) = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.
   On calcule $1+2+\cdots+p+(p+1) = [1+2+\cdots+p]+(p+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence : $1+2+\cdots+p = \dfrac{p(p+1)}{2}$ donc $[1+2+\cdots+p]+(p+1) = \dfrac{p(p+1)}{2}+(p+1) = (p+1)\left(\dfrac{p}{2}+1\right) = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$. On a donc démontré que $\mathscr{P}_{p+1}$ était vraie (donc l'hérédité).
3. $\left.\begin{array}{c} \mathscr{P}_1 \text{ est vérifiée} \\ \mathscr{P}_n \text{ est héréditaire pour tout } n \geqslant 1 \end{array}\right\}$ donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

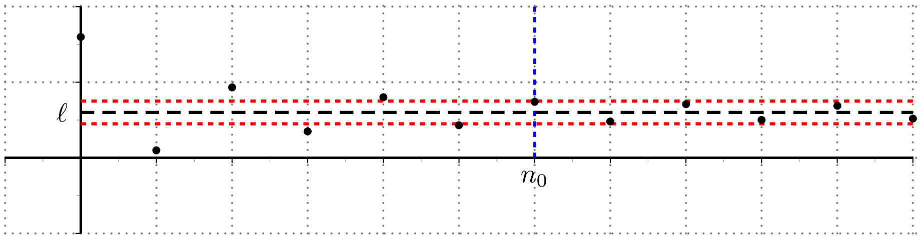
   Donc, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 Limite d'une suite

3.1 Limite finie

Définition

La suite (u_n) admet pour limite ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) est convergente vers ℓ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



Théorème d'unicité

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Suites de référence

Les suites $n \mapsto \dfrac{1}{n}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^3}$ et $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

3.2 Limite infinie

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;B[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to-\infty} u_n = -\infty$.

Suites de référence

Les suites $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$ et $n \mapsto \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

3.3 Limites et comparaison

Théorème de comparaison (DAC)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
- u_n est inférieur ou égale à v_n à partir d'un certain rang ;
- u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$;

alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Autre théorème de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
- u_n est inférieur ou égale à v_n à partir d'un certain rang ;
- v_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$;

alors u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème des gendarmes

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que :
- $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$;

alors la suite (u_n) est convergente et a pour limite ℓ.

4 Opérations et limites

4.1 Limite de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

On rédigera ainsi : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell+\ell'}^{\text{par somme}}$

4.2 Limite du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	∞
$\ell' \neq 0$	$\ell\times\ell'$	0	∞
0	0	0	?
∞	∞	?	∞

On rédigera ainsi : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) = \ell\times\ell'}^{\text{par produit}}$

4.3 Limite de l'inverse d'une suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	∞^*	0

* à condition que la suite garde un signe constant à partir d'un certain rang

4.4 Limite du quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	∞
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞
0	∞^*	?	∞^*
∞	0	0	?

* à condition que la suite garde un signe constant à partir d'un certain rang

On rédigera ainsi : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}}^{\text{par quotient}}$

5 Limite de suite géométrique

Soit q un nombre réel ;
- si $q > 1$, alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$ (**DAC**) ;
- si $-1 < q < +1$, alors la suite (q^n) converge vers 0.

> Pour démontrer la limite infinie d'une suite géométrique de raison $q > 1$, on démontrera d'abord par récurrence sur n le résultat suivant : si $a > 0$ et $n > 1$, alors $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Ensuite, comme $q > 1$, on posera $q = 1 + a$ avec $a > 0$, et on utilisera un théorème de comparaison pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Limite d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison q :

- si $q > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $u_0 > 0$, vers $-\infty$ si $u_0 < 0$:
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante ;
- si $-1 < q < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 ;
- si $q \leqslant -1$, la suite (u_n) n'a pas de limite.

6 Suites bornées

Suite majorée

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, on ait : $u_n \leqslant M$.

On dit que M est un majorant de la suite (u_n).

Suite minorée

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, on ait : $u_n \geqslant m$.

On dit que m est un minorant de la suite (u_n).

Suite bornée

Une suite est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

7 Convergence des suites monotones

Théorème de la convergence monotone

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Théorème

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. (D)
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Théorème

- Si une suite (u_n) est croissante et a pour limite ℓ, alors pour n de $\mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$. (D)
- Si une suite (u_n) est décroissante et a pour limite ℓ, alors pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

8 Algorithmes

8.1 Exercices

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie)
Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle
Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = a$ et l'algorithme ci-contre :

1. Que fait cet algorithme ?
2. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 en prenant $u_0 = 3$; faire tourner l'algorithme « à la main » et suivre les variables.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Coder cet algorithme avec `AlgoBox` et vérifier les résultats des questions précédentes.

```
Variables
        a, n, i : nombres
Début
        Entrer a
        Entrer n
        Pour i variant de 1 à n
                a prend la valeur 2 × a − 1
                Afficher a
Fin
```

Exercice 2

1. Faire fonctionner à la main l'algorithme ci-contre.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$ pour tout n de $\mathbf{N}$.
   Que représente pour cette suite le nombre n affiché en fin d'algorithme ?
3. Modifier l'algorithme pour obtenir la plus petite valeur n_0 de n telle que :
   $$u_n > 1000$$
4. Coder en `AlgoBox` l'algorithme obtenu en 3 et déterminer n_0.

```
Variables
        n, u : nombres
Initialisation
        n prend la valeur 0
        u prend la valeur 10
Traitement
        Tant que u ⩽ 100
                n prend la valeur n + 1
                u prend la valeur 2 × u − 5
Sortie
        Afficher n
```

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout n de $\mathbf{N}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Au moyen d'un algorithme, déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $u_n > 100$.

8.2 Corrections des exercices

Exercice 1

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    a PREND_LA_VALEUR 2*a-1
    AFFICHER a
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On entre 3 dans a et 4 dans n pour répondre au problème posé.

Exercice 2

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE u
  LIRE nb
  TANT_QUE (u<=nb) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR 2*u+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

On entre 10 dans u, 100 dans nb pour la question 2 et 1000 dans nb pour la question 3.

Exercice 3

On démontre la croissance par récurrence.

Algorithme :

Variables
    n, u, nb : nombres
Entrées
    Entrer u
    Entrer nb
Initialisation
    n prend la valeur 0
Traitement
    Tant que $u \leqslant nb$
        n prend la valeur $n+1$
        u prend la valeur $2u+1$
Sortie
    Afficher n

Algorithme codé en `AlgoBox` :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE u
  LIRE nb
  TANT_QUE (u<=nb) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR 2*u+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

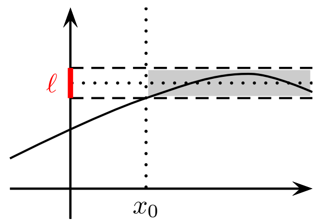
On entre 3 dans u et 100 dans nb.

Chapitre 2 - Limites de fonctions

1 Limites à l'infini

1.1 Limite finie en $+\infty$

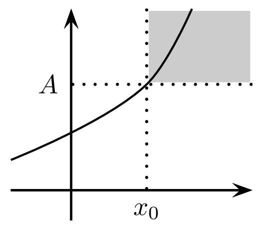
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.
La fonction f admet le réel ℓ pour limite en $+\infty$ si, pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un réel $x_0 \geqslant a$ tel que, si $x > x_0$, alors $f(x) \in J$. On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.



Exemple – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-1}$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

1.2 Limite infinie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, quel que soit le nombre A assez grand, on peut trouver un nombre $x_0 \geqslant a$ tel que, pour tout $x > x_0$, on ait $f(x) > A$.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

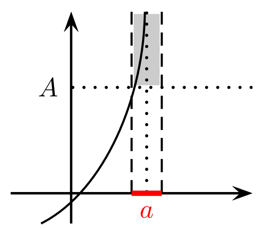


Exemple – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 Limites en un point

2.1 Limite infinie en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. On appelle $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.
La fonction f admet $+\infty$ pour limite quand x tend vers a si, pour tout nombre A assez grand, il existe un intervalle ouvert I contenant a ou ayant pour borne a, tel que, pour tout x de $I \cap \mathscr{D}_f$: $f(x) > A$.
On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.



2.2 Limite à gauche, à droite

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction en un point, il faut souvent distinguer la limite à gauche et la limite à droite.
On dira que x tend vers a à gauche si x tend vers a en étant plus petit que a ; on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.
On définit de même la limite à droite si x tend vers a en étant plus grand que a que l'on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

Exercice – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-1}$; calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x)$.

3 Opérations sur les limites

Ces tableaux sont valables si x tend vers un réel a, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

3.1 Limite d'une somme de fonctions

$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

3.2 Limite d'un produit de fonctions

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell \neq 0$	0	∞
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	∞
0	0	0	?
∞	∞	?	∞

3.3 Limite d'un quotient de fonctions

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell \neq 0$	0	∞
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞
0	∞^*	?	∞^*
∞	0	0	?

* sous condition de signe de la fonction g

4 Limites de fonctions de référence

4.1 Limites en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \ (n \in \mathbf{N}^*)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \ (n \in \mathbf{N}^*)$

4.2 Limites en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \ (n > 0 \text{ pair})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \ (n \text{ impair})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \ (n \in \mathbf{N}^*)$

4.3 Limites en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

5 Règles opératoires

Règle 1

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Règle 2

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite en l'infini du quotient de ses termes de plus haut degré.

6 Théorèmes de comparaison

Ces trois théorèmes sont donnés pour x tendant vers $+\infty$ mais sont encore valables pour x tendant vers $-\infty$.

Théorème – Limite par minoration

Si, pour x assez grand, $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème – Limite par majoration

Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes – Limite par encadrement

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

7 Limite de fonction composée

Soit g une fonction définie sur $\mathscr{D}_g$ et h une fonction définie sur $\mathscr{D}_h$.
La fonction composée $f = g \circ h$ a pour ensemble de définition : $\mathscr{D} = \{x \in \mathscr{D}_h \ / \ h(x) \in \mathscr{D}_g\}$.
On définit la fonction f par $f(x) = g(h(x))$ pour tout x de $\mathscr{D}$.

$$\begin{array}{rlcl} h: & x & \longmapsto h(x) & \\ g: & & X \longmapsto & g(X) \\ f = g\circ h: & x & \longmapsto & g(h(x)) \end{array}$$

Théorème

f, g et h sont trois fonctions telles que $f = g \circ h$.
Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Exemple

On veut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+4}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x+4} = 3 \\ \text{on pose : } X = \dfrac{3x-1}{x+4} \\ \lim\limits_{X\to 3} \sqrt{X} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+4}} = \sqrt{3}$$

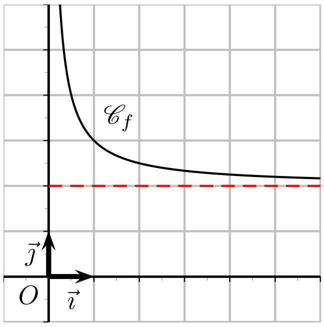
8 Asymptotes

8.1 Asymptote horizontale

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, alors la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$, alors la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

On aura souvent à déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale ; pour cela, on cherchera le signe de $f(x)-\ell$ en fonction de x : si le signe de cette différence est positif, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote, sinon $\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'asymptote.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

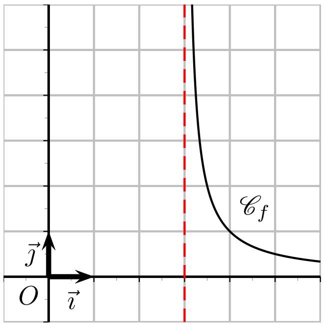
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\boxed{\text{La droite d'équation } y=2 \text{ est asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty.}$

$f(x)-2=\dfrac{1}{x}>0$ sur $]0\,,+\infty[$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote horizontale d'équation $y=2$ sur $]0\,,+\infty[$.

8.2 Asymptote verticale

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, alors la droite d'équation $x=a$ est asymtote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Il faudra en général distinguer la limite à gauche de a et la limite à droite de a.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $]3\,,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-3)=0\\ x>3\Rightarrow x-3>0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{1}{x-3}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=+\infty.$$

$\boxed{\text{La droite d'équation } x=3 \text{ est asymptote verticale à } \mathscr{C}_f.}$

Chapitre 3 - Probabilités conditionnelles

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Probabilité de B sachant A

Définition

On appelle A et B deux événements d'une même expérience aléatoire ; on suppose que la probabilité de A est non nulle. La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, est le nombre noté $P_A(B)$ et défini par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

On appelle $P_A(B)$: « la probabilité de B sachant A ».

Remarque

Si la probabilité de B est non nulle, on définit de même la probabilité de A sachant B : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

1.2 Formule des probabilités totales

Définition et théorème

- Les parties A_1, A_2, ... A_n constituent une **partition** d'un ensemble A si :
  - chaque partie est non vide ;
  - les parties sont deux à deux disjointes ;
  - la réunion de toutes les parties est égale à A.
- Si $\{A_1,\ A_2, \dots\ A_n\}$ constitue une partition d'un événement A, alors on a :

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(A).$$

Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, ... A_n sont des événements de probabilités non nulles réalisant une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

avec pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n\ :\ P(A_k \cap B) = P(A_k) \times P_{A_k}(B)$.

2 Indépendance

2.1 Événements indépendants

Définition On appelle A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.

Les deux événements A et B sont **indépendants** si : $P(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Théorème On appelle A et B deux événements d'une même expérience aléatoire et on suppose que la probabilité de A est non nulle.

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(B) = P_A(B)$.

2.2 Événements contraires

Théorème (DAC)

Si deux événements A et B d'une même expérience aléatoire sont indépendants, alors il en est de même de $\overline{A}$ et B.

Démonstration

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire ; on suppose que A et B sont indépendants. On appelle $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

- On calcule $P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.
  $\overline{A}$ et A sont des événements contraires donc $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
  donc $P\left(\overline{A}\right) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B)$.
  Or A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
  On en déduit que $P\left(\overline{A}\right) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B)$.
- D'après la formule des probabilités totales, on peut dire que :
  $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et donc que $P(B) - P(A \cap B) = P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
- On peut donc déduire que $P\left(\overline{A}\right) \times P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et donc que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Réciproque

Il est très facile de démontrer la réciproque de ce théorème, autrement dit que si $\overline{A}$ et B sont indépendants, alors A et B sont indépendants.

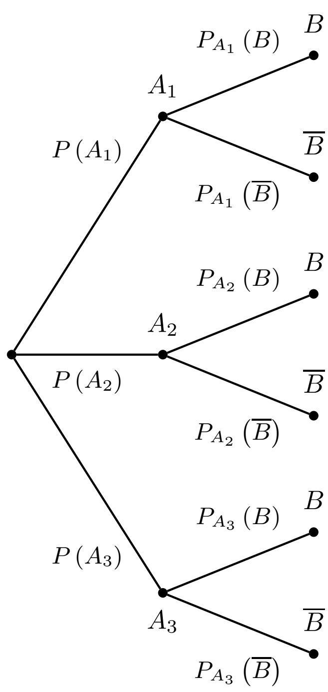
Si $\overline{A}$ et B sont indépendants, on pose $C = \overline{A}$, et on applique le théorème : C et B sont indépendants donc $\overline{C}$ et B sont indépendants. Or $\overline{C} = \overline{\overline{A}} = A$, donc A et B sont indépendants.

Corollaire

Si deux événements A et B d'une même expérience aléatoire sont indépendants, alors il en est de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

3 Modélisation et arbre pondéré

Pour l'exemple ci-contre, les événements A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers.

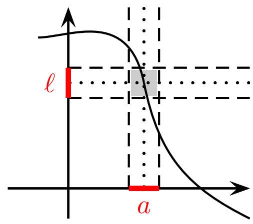


- **Règle 1 – Loi des nœuds**
  La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
  $$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$
  $$P_{A_1}(B) + P_{A_1}\left(\overline{B}\right) = 1$$
- **Règle 2 – Loi des chemins**
  La probabilité d'un événement à l'issue d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
  $$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P_{A_2}(B)$$
- **Règle 3**
  La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements associés aux chemins conduisant à cet événement.
  $$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$
  d'après la formule des probabilités totales.

Chapitre 4 - Continuité - Dérivation

1 Continuité

1.1 Limite finie en a



Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. On appelle $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. La fonction f admet pour limite le nombre ℓ quand x tend vers a si, pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, on peut trouver un intervalle ouvert I contenant a ou ayant pour borne a, tel que, pour tout x appartenant à $I \cap \mathscr{D}_f$, $f(x)$ appartient à J.
On note : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; alors $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

1.2 Continuité

Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f.

Définitions

La fonction f est **continue en un point a de I** si f admet une limite en a et si cette limite est $f(a)$: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Il faut souvent calculer les limites en a à droite et à gauche et comparer les résultats à $f(a)$.

Théorème 1

Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f + g$ et fg sont continues en a.

C'est une conséquence des théorèmes sur la limite d'une somme et la limite d'un produit.

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a ; si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

On en déduit que toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
Attention : la réciproque de cette propriété est fausse ; contre-exemple à connaître.

Conséquences

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbf{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

2 Dérivation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

On dit que la fonction f est **dérivable** en a si le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
On note cette limite $f'(a)$ et on l'appelle « **nombre dérivé** de f en a ».
On dit que « f est dérivable sur I » si f est dérivable en tout point a de I.

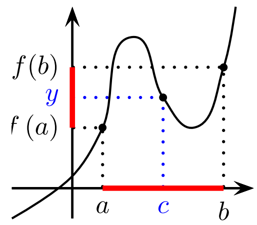
Définition équivalente

f est dérivable en $a \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

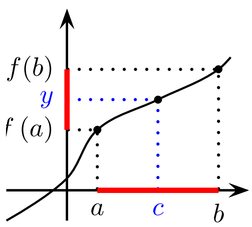
Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$.
Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = y$.

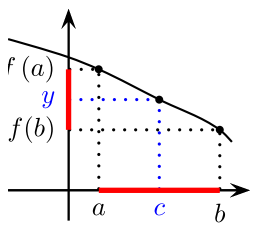


Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel c de $[a\,;\,b]$ tel que $f(c) = y$.
Cela veut dire que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans $[a\,;\,b]$.



f strictement croissante sur $[a\,;\,b]$



f strictement décroissante sur $[a\,;\,b]$

3 Dérivées de fonctions composées

3.1 Fonction $x \longmapsto u^n(x)$

Si u est une fonction dérivable en x_0, alors la fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = n \times u'(x_0) \times [u(x_0)]^{n-1}$. On écrit : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On peut démontrer cette propriété par récurrence sur n.

3.2 Fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

Si u est une fonction dérivable en x_0 et si $u(x_0) > 0$, alors la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$. On écrit : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

3.3 Fonction $x \longmapsto f(ax + b)$

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$; soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$.
Alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(x) = af'(ax + b)$.

3.4 Fonction $x \longmapsto v(u(x))$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0, et v une fonction définie sur un intervalle J contenant le réel $y_0 = u(x_0)$.
Si la fonction u est dérivable en x_0 et si la fonction v est dérivable en $y_0 = u(x_0)$, alors la fonction composée $f = v \circ u$, définie pour tout x de I par $f(x) = v[u(x)]$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = (v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$.

4 Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie

On part d'un intervalle $[a\,;b]$ dans lequel la fonction f est strictement monotone et change de signe ; autrement dit $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires (ce qui équivaut à $f(a) \times f(b) < 0$).
On prend le milieu de $[a\,;b]$ qui est $\dfrac{a+b}{2}$, et on calcule $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.
Si $f(a)$ et $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ sont de même signe, la solution de l'équation est dans l'intervalle $\left[\dfrac{a+b}{2}\,;b\right]$; on remplace donc a par $\dfrac{a+b}{2}$ et on recommence. Sinon, on remplace b par $\dfrac{a+b}{2}$ et on recommence.

Première version : on décide de faire n découpages du segment de départ.

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     i EST_DU_TYPE NOMBRE
5     moy EST_DU_TYPE NOMBRE
6     c EST_DU_TYPE NOMBRE
7     n EST_DU_TYPE NOMBRE
8   DEBUT_ALGORITHME
9     LIRE a
10    LIRE b
11    LIRE n
12    SI (a>b) ALORS
13      DEBUT_SI
14      c PREND_LA_VALEUR b
15      b PREND_LA_VALEUR a
16      a PREND_LA_VALEUR c
17      FIN_SI
18    SI (F1(a)*F1(b)>0) ALORS
19      DEBUT_SI
20      AFFICHER "L'équation n'a pas de solution."
21      FIN_SI
22      SINON
23        DEBUT_SINON
24        AFFICHER "Recherche de solution entre "
25        AFFICHER a
26        AFFICHER " et "
27        AFFICHER b
28        POUR i ALLANT_DE 1 A n
29          DEBUT_POUR
30          moy PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
31          SI (F1(a)*F1(moy)>0) ALORS
32            DEBUT_SI
33            a PREND_LA_VALEUR moy
34            FIN_SI
35            SINON
36              DEBUT_SINON
37              b PREND_LA_VALEUR moy
38              FIN_SINON
39          AFFICHER "La solution est entre "
40          AFFICHER a
41          AFFICHER " et "
42          AFFICHER b
43          FIN_POUR
44        FIN_SINON
45  FIN_ALGORITHME
```

La fonction f s'appelle F1 dans Algobox ; il faut la définir avant de lancer l'algorithme.

Lignes 12 à 17
Si $a > b$, alors on permute a et b.

Lignes 18 à 21
La fonction f ne change pas de signe entre a et b donc l'équation n'a pas de solution.

Ligne 28
On fait n découpages de l'intervalle $[a\,;b]$: à chaque étape, on coupe l'intervalle en deux intervalles de mêmes longueurs.

Ligne 30
On calcule $\dfrac{a+b}{2}$ que l'on met dans la variable `moy`.

Lignes 31 à 34
Si $f(a)$ et $f(\texttt{moy})$ sont de même signe, on donne à a la valeur `moy`.

Lignes 35 à 38
Sinon, on donne à b la valeur `moy`.

Lignes 39 à 42
Á chaque étape, on affiche le nouvel intervalle qui a une longueur égale à la moitié de celle de l'intervalle précédent.

Autre version : on fait le découpage des segments tant que la longueur du segment est supérieure à une valeur entrée au début (on prendra des valeurs comme 10^{-1}, 10^{-2}, etc.).

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     i EST_DU_TYPE NOMBRE
5     moy EST_DU_TYPE NOMBRE
6     c EST_DU_TYPE NOMBRE
7     e EST_DU_TYPE NOMBRE
8   DEBUT_ALGORITHME
9     LIRE a
10    LIRE b
11    LIRE e
12    SI (a>b) ALORS
13      DEBUT_SI
14      c PREND_LA_VALEUR b
15      b PREND_LA_VALEUR a
16      a PREND_LA_VALEUR c
17      FIN_SI
18    SI (F1(a)*F1(b)>0) ALORS
19      DEBUT_SI
20      AFFICHER "L'équation n'a pas de solution."
21      FIN_SI
22      SINON
23        DEBUT_SINON
24        AFFICHER "Recherche de solution entre "
25        AFFICHER a
26        AFFICHER " et "
27        AFFICHER b
28        TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
29          DEBUT_TANT_QUE
30          moy PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
31          SI (F1(a)*F1(moy)>0) ALORS
32            DEBUT_SI
33            a PREND_LA_VALEUR moy
34            FIN_SI
35            SINON
36              DEBUT_SINON
37              b PREND_LA_VALEUR moy
38              FIN_SINON
39          AFFICHER "La solution est entre "
40          AFFICHER a
41          AFFICHER " et "
42          AFFICHER b
43          FIN_TANT_QUE
44        FIN_SINON
45  FIN_ALGORITHME
```

Ligne 11
On entre la longueur de l'intervalle que l'on veut à la fin du processus dans la vaiable `e` que l'on a définie en ligne 7.

Ligne 28
On découpe l'intervalle en deux intervalles de même longueur tant que la longueur `b-a` de l'intervalle est supérieure au nombre `e`.

Chapitre 5 - Nombres complexes

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Écriture algébrique d'un nombre complexe

Il existe un ensemble, noté $\mathbf{C}$, qui contient $\mathbf{R}$, et qui vérifie :

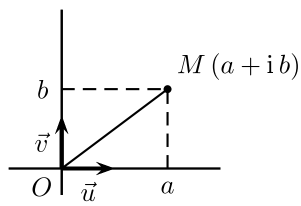
1. L'ensemble $\mathbf{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbf{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.
2. Il existe un élément i de $\mathbf{C}$ tel que : $\mathrm{i}^2 = -1$.
3. Tout élément z de $\mathbf{C}$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = a + \mathrm{i}\, b$ où a et b sont des nombres réels : c'est **l'écriture algébrique** du nombre z.

Notation et propriétés

- $\mathbf{C}$ est **l'ensemble des nombres complexes**.
- Si $z = a + \mathrm{i}\, b$, le nombre réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}\,(z)$, et le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}\,(z)$. Attention : $\mathrm{Re}\,(z) \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{Im}\,(z) \in \mathbf{R}$.
- $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \Leftrightarrow z$ est un réel.
- $\mathrm{Re}\,(z) = 0 \Leftrightarrow z$ est un **imaginaire pur**.

1.2 Interprétation géométrique

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, à chaque point M correspond un couple de réels $(a\,,b)$; à tout couple $(a\,,b)$, on fait correspondre le nombre complexe $a + \mathrm{i}\, b$, et à tout nombre complexe de la forme $a + \mathrm{i}\, b$, on fait correspondre le couple $(a\,,b)$.
Autrement dit, à tout point M du plan de coordonnées $(a\,,b)$, on fait correspondre le nombre complexe $a + \mathrm{i}\, b$: on dit que le nombre complexe $a + \mathrm{i}\, b$ est **l'affixe** du point M.
Inversement, à tout complexe $a + \mathrm{i}\, b$, on fait correspondre le point M de coordonnées $(a\,,b)$; on dit que le point M est **l'image** du nombre complexe $a + \mathrm{i}\, b$.



L'axe des abscisses s'appelle aussi **l'axe des réels** car tous les réels y ont leurs images.
• « M appartient à l'axe des abscisses » $\Leftrightarrow$ « $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ » $\Leftrightarrow$ « z est un réel ».

L'axe des ordonnées s'appelle aussi **l'axe des imaginaires purs** car tous les nombres imaginaires purs y ont leurs images.
• « M appartient à l'axe des ordonnées » $\Leftrightarrow$ « $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ » $\Leftrightarrow$ « z est un imaginaire pur ».

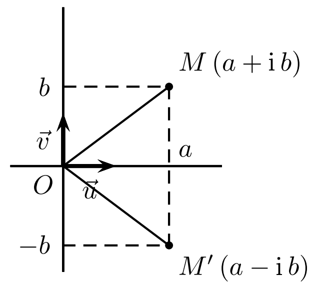
1.3 Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $a + \mathrm{i}\, b = a' + \mathrm{i}\, b' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Conséquence : $a + \mathrm{i}\, b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition



Soit z un nombre complexe dont l'écriture algébrique est $z = a + \mathrm{i}\,b$.
On appelle **conjugué** du nombre z, le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$.

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, les points M d'affixe z et M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

- Pour tout complexe z : $\overline{\overline{z}} = z$
- Pour tous complexes z et z' : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Pour tout complexe z et tout entier naturel n non nul : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- Pour tout complexe z et tout complexe z' non nul : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

2.3 Autres propriétés

- Si $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors : $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$.
- Si $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors : z est réel $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$
  z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = -z$

3 Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c trois **réels** avec $a \neq 0$.
L'équation du second degré (à coefficients réels) $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbf{C}$:

- une ou deux solutions réelles si $\Delta \geqslant 0$ (voir cours de 1re) ;
- deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$; ce sont :

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas : $az^2 + bz + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)$

4 Module d'un nombre complexe

4.1 Définition

Soit z un nombre complexe ayant le point M comme image dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On appelle **module** de z, et on note $|z|$, la distance OM.
Il résulte de la définition que, pour tout complexe z : $|z| \geqslant 0$.

4.2 Propriétés

- Si $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Pour tout complexe z : $z \times \overline{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$.
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- Pour tous complexes z et z' : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- Pour tout complexe z et tout complexe z' non nul : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

5 Affixe d'un vecteur

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

5.1 Définition

Si A est le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

5.2 Propriétés

1. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.
2. Si les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ ont pour affixes respectives z et z', alors le vecteur $\vec{w}+\vec{w'}$ a pour affixe $z+z'$.
3. Si le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe z, alors pour tout réel k, le vecteur $k\,\vec{w}$ a pour affixe kz.

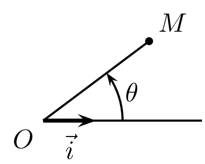
5.3 Milieu

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

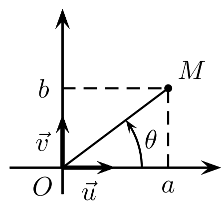
6 Argument et forme trigonométrique

6.1 Définitions

Les coordonnées cartésiennes d'un point M du plan sont données par un couple $(a\,,b)$ de réels. Il existe une autre façon de repérer les points dans un plan : le repérage polaire. On définit un point origine O et une demi-droite $(O\,;\vec{\imath})$; un point M différent de O, est repéré par sa distance à O, et par une mesure de l'angle orienté $\theta = \left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right)$.



Dans le plan complexe, au couple $(a\,,b)$ correspond le nombre complexe z que l'on écrit sous forme algébrique $a+\mathrm{i}\,b$. Au repérage polaire, correspond une autre écriture du nombre complexe : **la forme trigonométrique**.



Soit z le nombre complexe non nul qui s'écrit $z = a+\mathrm{i}\,b$.
Alors : $z = a+\mathrm{i}\,b = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\mathrm{i}\,\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.
On cherche le réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Ce nombre est défini à 2π près.
On a donc : $z = |z|\,(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)$. Le nombre θ est appelé **argument** de z et est noté $\arg(z)$.

6.2 Propriétés

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls :
$\arg(zz') = \arg(z)+\arg(z')+k2\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$, et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z)-\arg(z')+k2\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$.

Conséquences
- pour tout z de $\mathbf{C}^*$: $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)+k2\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$;
- pour tout z de $\mathbf{C}^*$ et tout n de $\mathbf{N}$: $\arg(z^n) = n\times\arg(z)+k2\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$.

6.3 Utilisation de l'affixe

- Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et M le point du plan complexe tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
  L'affixe du point M est donc : $z_M = z_B - z_A$.
  $OM = |z_M| = |z_B - z_A|$; or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ donc $AB = OM$, et donc $AB = |z_B - z_A|$.
  De plus : $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right)$; on en déduit : $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) + k2\pi\ \ (k \in \mathbf{Z})$.
- Si A, B, C et D sont quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D telles que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$, alors : $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + k2\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

7 Forme exponentielle

7.1 Introduction

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ par $f(x) = \cos x + \mathrm{i}\,\sin x$.
En utilisant les développements de $\cos(x+y)$ et de $\sin(x+y)$, on démontre que, pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Cette fonction f vérifie donc l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle.

7.2 Définition

Le nombre complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$ est de module 1 ; il peut s'écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
Le nombre complexe $|z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta\right)$ peut d'écrire $|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$; c'est la **forme exponentielle** du nombre complexe z.

7.3 Propriétés

Pour tous θ et θ' de $\mathbf{R}$ et pour tous r et r' de $]0\,,+\infty[$:

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + k2\pi\,(k \in \mathbf{Z})$

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = (r \times r')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')}$

$\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$

$\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')}$

8 Ensembles de points

8.1 Cercle

Soit r un réel strictement positif et Ω le point d'affixe ω.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω et de rayon r.
- Si le module de $z - \omega$ est r, alors le nombre $z - \omega$ s'écrit $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où θ est un réel.
  Le cercle de centre Ω et de rayon r est donc aussi l'ensemble des points M d'affixe $z = \omega + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où $\theta \in [0\,,2\pi[$.
  Cette écriture s'appelle la **représentation paramétrique** d'un cercle.

8.2 Médiatrice

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la droite médiatrice du segment $[AB]$.
Il faut savoir déterminer une équation de cette médiatrice ; pour cela on remplace z par $x + \mathrm{i}\,y$ et on écrit que les modules $|z - z_A|$ et $|z - z_B|$, et donc leurs carrés, sont égaux.

Chapitre 6 - Fonction exponentielle

1 Initiation à la fonction exponentielle

1.1 Problème

Le but de cette activité est de construire point par point une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0\,,1]$, et vérifiant, pour tout réel x de I, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Chercher la fonction f vérifiant $f'(x) = f(x)$, c'est résoudre une **équation différentielle**, c'est-à-dire résoudre une équation dont les solutions sont des fonctions.

1.2 Détermination d'une solution approchée

La fonction f est dérivable en x_0 donc : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Pour h suffisamment proche de 0, on a donc : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h\,f'(x_0)$

Comme pour tout x de I, $f'(x) = f(x)$, on peut écrire (égalité 1) :

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + h\,f(x_0) = (1+h)\ f(x_0)$$

Pour $x_0 = 0$, on a donc $f(h) \approx (1+h) \times f(0)$

Or $f(0) = 1$ donc $f(h) \approx (1+h)$

Écrire l'égalité 1 pour $x_0 = h$: $f(2h) = f(h+h) \approx (1+h)\ f(h) \approx (1+h)^2$

Écrire l'égalité 1 pour $x_0 = 2h$: $f(3h) = f(2h+h) \approx (1+h)\ f(2h) \approx (1+h)^3$

Conjecturer ce que l'on trouve comme approximation pour $f(nh)$ et le démontrer par récurrence.

On peut conjecturer que $f(nh) \approx (1+h)^n$. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $f(nh) \approx (1+h)^n$.

- Pour $n = 0$, $f(nh) = f(0) = 1$ et $(1+h)^0 = 1$; donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}_p$ soit vraie, autrement dit que $f(ph) \approx (1+h)^p$.
  On veut démontrer que $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie, autrement dit que $f((p+1)\,h) \approx (1+h)^{p+1}$.
  Si on écrit l'égalité 1 pour $x_0 = ph$, on a : $f(ph+h) \approx (1+h)\ f(ph)$.
  Mais d'après l'hypothèse de récurrence : $f(ph) \approx (1+h)^p$.
  On a donc : $f(ph+h) \approx (1+h)\ (1+h)^p \Leftrightarrow f((p+1)\,h) \approx (1+h)^{p+1}$.
  Donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang $p+1$.
- La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout n : donc pour tout entier naturel n, $f(nh) \approx (1+h)^n$.

1.3 Autre problème

Soit a un réel non nul. Construire point par point une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0\,,1]$, et vérifiant, pour tout réel x de I, $f'(x) = a\,f(x)$ et $f(0) = 1$.
On cherche donc à résoudre l'équation différentielle $f'(x) = a\,f(x)$ avec comme condition $f(0) = 1$.

1.4 Grille de résultats

Pour $h = 0,1$:

n	$x = nh$	$f(x) = (1+h)^n$	$\exp(x)$
0	0	1,000	1,000
1	0,1	1,100	1,105
2	0,2	1,210	1,221
3	0,3	1,331	1,350
4	0,4	1,464	1,492
5	0,5	1,611	1,649
6	0,6	1,772	1,822
7	0,7	1,949	2,014
8	0,8	2,144	2,226
9	0,9	2,358	2,460
10	1	2,594	2,718

Pour $h = 0,05$:

n	$x = nh$	$f(x) = (1+h)^n$	$\exp(x)$
0	0	1,000	1,000
1	0,05	1,050	1,051
2	0,1	1,103	1,105
3	0,15	1,158	1,162
4	0,2	1,216	1,221
5	0,25	1,276	1,284
6	0,3	1,340	1,350
7	0,35	1,407	1,419
8	0,4	1,477	1,492
9	0,45	1,551	1,568
10	0,5	1,629	1,649
11	0,55	1,710	1,733
12	0,6	1,796	1,822
13	0,65	1,886	1,916
14	0,7	1,980	2,014
15	0,75	2,079	2,117
16	0,8	2,183	2,226
17	0,85	2,292	2,340
18	0,9	2,407	2,460
19	0,95	2,527	2,586
20	1	2,653	2,718

2 Existence de la fonction exponentielle

Théorème d'existence et d'unicité

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout x :

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Démonstration de l'unicité (DAC)

- On démontre dans un premier temps que la fonction f ne s'annule jamais et que, pour tout x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$; pour cela on étudie la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$ et on démontre qu'elle est constante et égale à 1.
- On suppose ensuite qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant les hypothèses du théorème et on démontre qu'elles sont identiques ; pour cela on étudie la fonction ψ définie par $\psi(x) = g(x) \times f(-x)$ et on démontre que cette fonction est constante et égale à 1.

Définition

La fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Conséquences

- La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

3 Propriétés de la fonction exponentielle

Équation fonctionnelle

Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Conséquences

- Pour tous nombres a et b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- Pour tout réel x et tout entier relatif n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Notation

En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on écrit : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

- $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$;
- pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$; $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$; $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$;
- pour tout réel x et tout entier relatif n, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

4 Étude de la fonction exponentielle

4.1 Variations

Théorème

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Conséquences

- $a = b \Leftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$
- $a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$

4.2 Limites à l'infini

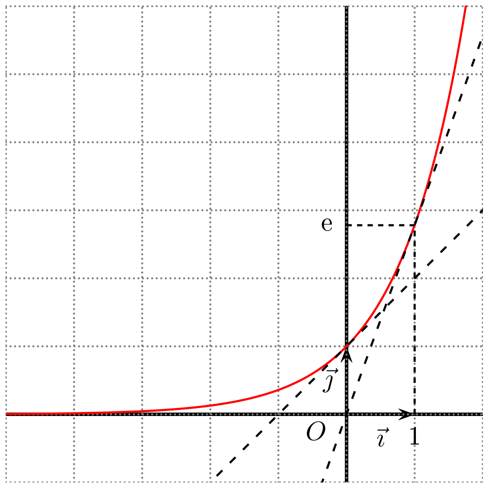
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \text{ (DAC)} \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$$

- On définit la fonction f par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - x$, et on démontre que $f(x) > 0$ pour tout réel x ; on en déduit que $\mathrm{e}^{x} > x$ pour tout réel x.
  On obtient la limite de e^{x} en $+\infty$ en utilisant un théorème de comparaison.
- La deuxième limite se démontre à partir de la première en effectuant le changement de variable $X = -x$.

4.3 Courbe représentative

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

Il est important de bien avoir en tête la représentation graphique de la fonction exp. Mais il faut également savoir calculer rapidement les équations de deux tangentes à la courbe : celle qui passe par le point de la courbe d'abscisse 0 et celle qui passe par le point de la courbe d'abscisse 1. Les équations de ces tangentes sont respectivement $y = x + 1$ et $y = \mathrm{e}\, x$. La deuxième tangente passe par l'origine du repère.



La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

4.4 Autres limites

Trois limites importantes sont à connaître :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x\,\mathrm{e}^{x}\right) = 0$$

Pour les deuxième et troisième limites, on dira que « l'exponentielle l'emporte sur x en l'infini ».

4.5 Fonction composée

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\left[\mathrm{e}^{u(x)}\right]' = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

Chapitre 7 - Droites et plans de l'espace

1 Perspective cavalière

La perspective cavalière est un ensemble de règles permettant de représenter un volume dans un plan ; ce n'est pas ce que nous voyons effectivement. En perspective cavalière :

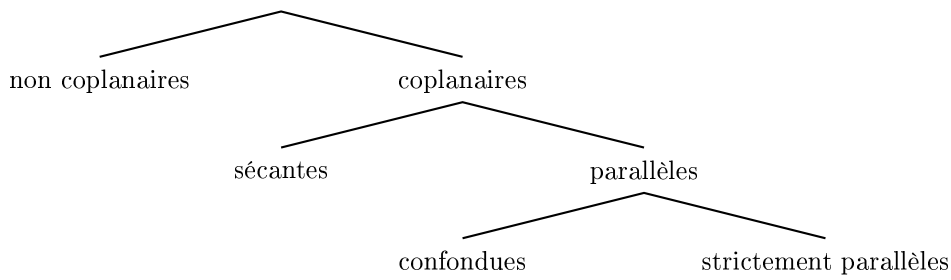
- deux droites parallèles dans la réalité sont représentées par deux droites parallèles ;
- les milieux des segments et les rapports des longueurs sont conservés ;
- les longueurs et les angles ne sont en général pas conservés ;
- les arêtes cachées sont représentées en pointillés.

2 Droites et plans de l'espace

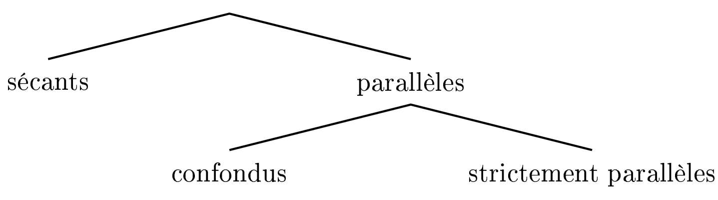
- Trois points non alignés définissent un plan et un seul.
- Si deux points M et N appartiennent à un plan, alors la droite (MN) est entièrement contenue dans le plan.
- Les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

3 Positions relatives

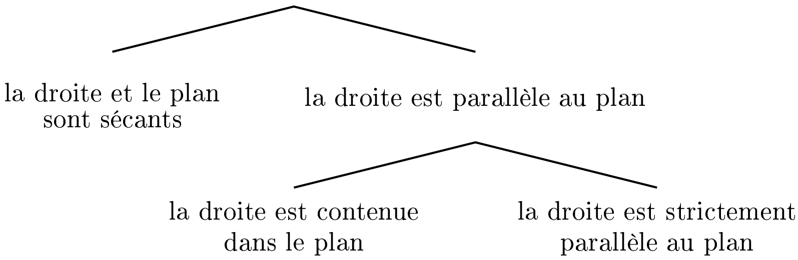
3.1 Deux droites



3.2 Deux plans



3.3 Une droite et un plan



4 Parallélisme dans l'espace

Théorème 1

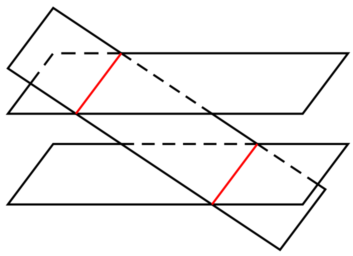
Si une droite d est parallèle à une droite Δ contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

$$\left.\begin{array}{l} d//\Delta \\ \Delta \subset \mathscr{P} \end{array}\right\} \Rightarrow d//\mathscr{P}$$

Théorème 2

Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, alors tout plan Π qui coupe $\mathscr{P}_1$ coupe $\mathscr{P}_2$, et les intersections sont deux droites parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_1//\mathscr{P}_2 \\ \Pi \cap \mathscr{P}_1 = \{d_1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Pi \cap \mathscr{P}_2 = \{d_2\} \\ d_1//d_2 \end{array}\right.$$



Théorème 3

Si une droite d est parallèle à deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants suivant une droite Δ, alors d et Δ sont deux droites parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} d//\mathscr{P}_1 \\ d//\mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{\Delta\} \end{array}\right\} \Rightarrow d//\Delta$$

Théorème 4

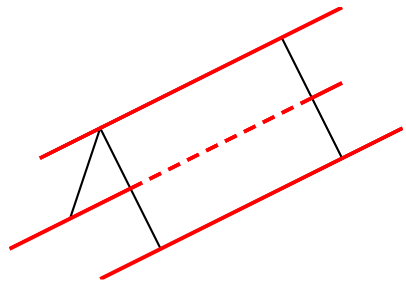
Si un plan $\mathscr{P}_1$ contient deux droites sécantes parallèles à un plan $\mathscr{P}_2$, alors $\mathscr{P}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}_2$.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \subset \mathscr{P}_1 \text{ et } d_2 \subset \mathscr{P}_1 \\ d_1 \text{ et } d_2 \text{ sécantes} \\ d_1//\mathscr{P}_2 \text{ et } d_2//\mathscr{P}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{P}_1//\mathscr{P}_2$$

Théorème 5 – Théorème du toit

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles respectivement contenues dans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, et si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et à d_2.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \subset \mathscr{P}_1 \text{ et } d_2 \subset \mathscr{P}_1 \\ \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{\Delta\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta // d_1 \\ \Delta // d_2 \end{array}\right.$$



5 Orthogonalité dans l'espace

5.1 Droites orthogonales

Définition

Dire que deux droites d_1 et d_2 de l'espace sont orthogonales signifie que leurs parallèles respectives δ_1 et δ_2 passant par un point I quelconque sont perpendiculaires. On écrit $d_1 \perp d_2$.

Théorème 6

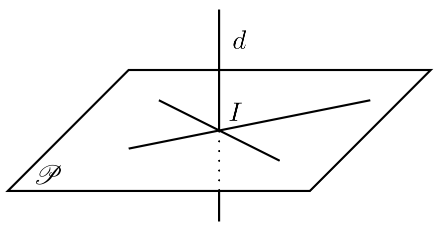
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow d_2 \perp \Delta$$

5.2 Droites perpendiculaires à un plan

Définition

Soit I le point d'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathscr{P}$.
On dit que la droite d est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ si la droite d est perpendiculaire à deux droites du plan $\mathscr{P}$ sécantes en I.
On admet que d est perpendiculaire à n'importe quelle droite Δ de $\mathscr{P}$ passant par I.

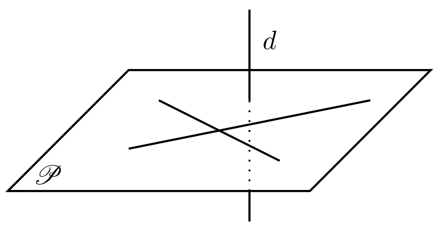


Théorème 7

Si une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$, alors d est orthogonale à toute droite Δ contenue dans $\mathscr{P}$.

Théorème 8

Pour qu'une droite d soit perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$, il suffit que d soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$.



Chapitre 8 - Fonction logarithme

1 Bijection

La fonction exponentielle associe, à tout réel x, un nombre réel strictement positif. De plus la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On en déduit que tout réel strictement positif admet un antécédent unique par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction exponentielle réalise une **bijection** de $\mathbf{R}$ sur $]0\,,+\infty[$.

2 Définition et propriétés immédiates

2.1 Définition

La fonction **logarithme népérien** est la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ qui, à tout réel x strictement positif, fait correspondre le nombre y dont l'exponentielle est égale à x.
On note cette fonction **ln**, et on a par définition pour tout $x > 0$: $y = \ln x \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\,y}$

La fonction ln est la **bijection réciproque** de la fonction exponentielle.

2.2 Propriétés

D'après la définition de la fonction ln :

- pour tout x, $\ln(\mathrm{e}^{\,x}) = x$
- pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$
- $\mathrm{e}^{\,0} = 1$ donc $0 = \ln 1$
- $\mathrm{e}^{\,1} = \mathrm{e}$ donc $1 = \ln \mathrm{e}$

2.3 Dérivée et sens de variation

La fonction ln est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.
On en déduit que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$.

Conséquences
Pour tous nombres a et b strictement positifs : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

3 Équation fonctionnelle

3.1 Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

On démontre cette propriété en utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{\,a+b} = \mathrm{e}^{\,a} \times \mathrm{e}^{\,b}$.

3.2 Conséquences

- Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$; et donc : $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
- Pour tous réels a_1, a_2 ... a_n strictement positifs : $\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$.
- Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n : $\ln(a^n) = n \times \ln a$.
- Pour tout réel a strictement positif : $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

4 Étude de la fonction ln

4.1 Limites

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

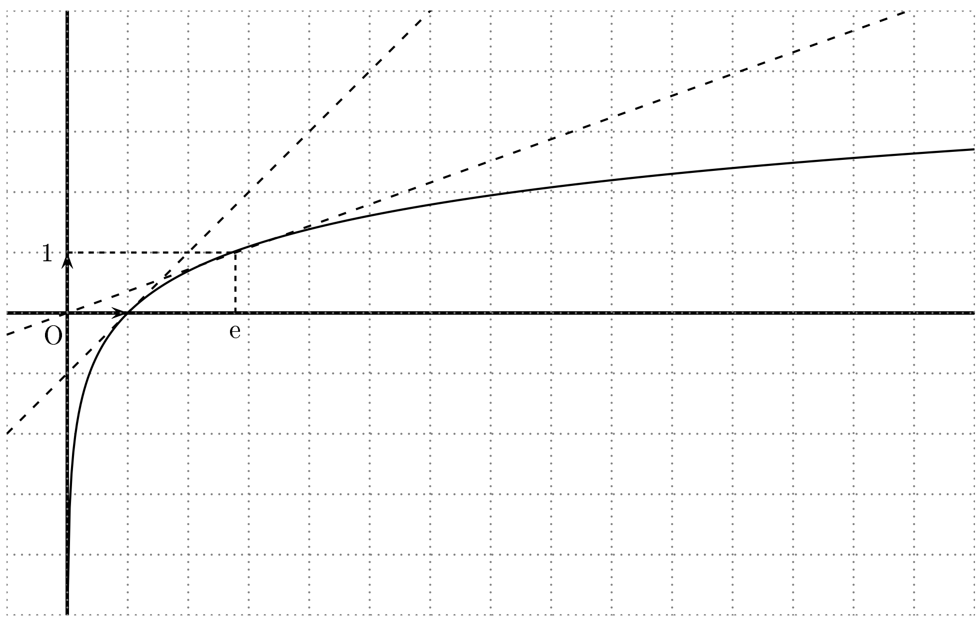
4.2 Tableau de variations et tracé

x	0	1	e	$+\infty$
ln	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

On en déduit que :

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Il est important de bien avoir en tête la représentation graphique de la fonction ln. Mais il faut également savoir calculer rapidement les équations de deux tangentes à la courbe, celle qui passe par le point de la courbe d'abscisse 1 et celle qui passe par le point de la courbe d'abscisse e.
Les équations de ces tangentes sont respectivement $y = x - 1$ et $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} x$.
La deuxième tangente passe par l'origine du repère.



La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe.

4.3 Équation $\ln x = m$

La fonction ln est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
En appliquant la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires, on démontre que, pour tout réel m, il existe un unique réel strictement positif α tel que $\ln\alpha = m$.
Or on sait que $\ln \mathrm{e}^{m} = m$ donc $\alpha = \mathrm{e}^{m}$.

On retiendra : $\ln x = m \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{m}$

4.4 Équation $\mathrm{e}^{x} = m$

Pour pouvoir trouver x tel que $\mathrm{e}^{x} = m$, il faut que $m > 0$.
Pour $m > 0$, $\mathrm{e}^{x} = m \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{\ln m} \Leftrightarrow x = \ln m$
Autre méthode :
Pour $m > 0$, $\mathrm{e}^{x} = m \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x}) = \ln m \Leftrightarrow x = \ln m$

On retiendra : pour $m > 0$, $\mathrm{e}^{x} = m \Leftrightarrow x = \ln m$

5 Autres limites

Autres limites importantes à connaître :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \times \ln x) = 0$$

6 Fonctions composées

En appliquant le théorème de la dérivation de fonctions composées, on montre que :
si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

7 Logarithme décimal

Le logarithme népérien s'appelle aussi « logarithme de base e ».
On définit sur $\mathbf{R}_+^*$ la fonction logarithme décimal, notée log, appelée aussi « logarithme de base 10 », par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.
On déduit de la définition que :

$$\log 1 = 0\,;\ \log 10 = 1\,;\ \log 100 = 2 \text{ et } \log 10^{n} = n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}.$$

On note aussi parfois cette fonction : $\log_{10}$.
On peut définir de même sur $\mathbf{R}_+^*$ un logarithme de base a entier strictement positif quelconque par : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Chapitre 9 - Calcul vectoriel dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Définition

On définit les vecteurs de l'espace comme les vecteurs dans un plan : par leur **direction**, leur **sens** et leur **norme**. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ représente le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.
Les règles de calcul dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, notamment la relation de Chasles : quels que soient les points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

1.2 Colinéarité

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

Alignement

Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

1.3 Caractérisation vectorielle d'une droite

La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires : $\mathscr{D}(A\,;\vec{v}) = \{M \in \mathscr{E} \ / \ \overrightarrow{AM} = k\vec{v} \text{ où } k \in \mathbf{R}\}$.

2 Vecteurs coplanaires

2.1 Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ où a et b sont deux réels quelconques.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires ; ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

2.2 Vecteurs coplanaires

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Soit O un point quelconque.

On définit les points A, B et C par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

Si les quatre points O, A, B et C sont dans un même plan, alors on dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.

Théorème

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

3 Repérage dans l'espace

3.1 Repère

Soient $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace ; alors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace.
Soit O un point de l'espace ; alors $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ forme un **repère** de l'espace.

3.2 Coordonnées dans l'espace

Point

Soit M un point de l'espace muni d'un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Alors il existe un unique triplet $(x\,, y\,, z)$ de nombres réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

$(x\,, y\,, z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$; x est l'**abscisse** de M, y est son **ordonnée** et z sa **cote**.

Vecteur

Soit $\vec{u}$ un point de l'espace muni d'un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Alors il existe un unique triplet $(x\,, y\,, z)$ de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

$(x\,, y\,, z)$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$; ce sont en fait les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

3.3 Propriétés

On se place dans l'espace muni d'un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,, y\,, z)$ et $(x'\,, y'\,, z')$, alors :

- le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\,, ky\,, kz)$;
- le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,, y + y'\,, z + z')$.

Si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,, y_A\,, z_A)$ et $(x_B\,, y_B\,, z_B)$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,, y_B - y_A\,, z_B - z_A)$;
- le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

4 Représentation paramétrique de droite

Dans l'espace, comme dans le plan, une droite est définie par un point et un vecteur directeur.

Théorème et définition

La droite $\mathscr{D}(A\,; \vec{v})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
On se place dans un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Si le point A a pour coordonnées $(x_A\,, y_A\,, z_A)$ et si le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(a\,, b\,, c)$, alors les coordonnées $(x\,, y\,, z)$ du point M de la droite $\mathscr{D}(A\,; \vec{v})$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \quad (\text{où } t \in \mathbf{R})$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}(A\,; \vec{v})$.
Le réel t est le paramètre ; à chaque valeur de t correspond un point de la droite, et à chaque point de la droite correspond une valeur de t.

5 Représentation paramétrique de plan

Dans l'espace, un plan est défini par un point et deux vecteurs directeurs (donc deux vecteurs non colinéaires).

Théorème et définition

Le plan $\mathscr{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient coplanaires.

On se place dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Si le point A a pour coordonnées $(x_A\,,y_A\,,z_A)$, si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(a\,,b\,,c)$ et le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(a\,,b\,,c)$, alors les coordonnées $(x\,,y\,,z)$ du point M du plan $\mathscr{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + a\,t + a'\,s \\ y = y_A + b\,t + b'\,s \\ z = z_A + c\,t + c'\,s \end{array}\right. \quad (\text{où } t \in \mathbf{R} \text{ et } s \in \mathbf{R})$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$.

Les réels t et s sont des paramètres ; à chaque valeur de $(t\,,s)$ correspond un point du plan.

Chapitre 10 - Intégration

1 Notion d'intégrale

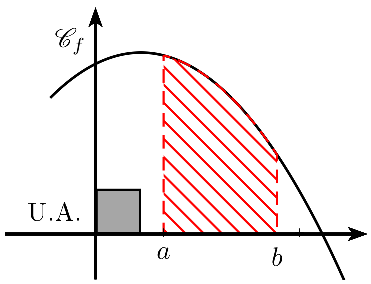
1.1 Aire sous la courbe

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,,b]$, le nombre qui exprime en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note : aire $(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

où $\mathscr{D} = \{M(x\,,y)\ /\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$



1.2 Dérivabilité de la fonction aire

Théorème

Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,,b]$, la fonction F définie sur $[a\,,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,,b]$ et a pour dérivée f.

2 Primitive d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Une primitive de la fonction f sur l'intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; soit Φ une primitive de f sur l'intervalle I.
Alors la fonction f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est définie par : $F(x) = \Phi(x) + k$ où k est une constante réelle.

Conséquences

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, et soit F une primitive de f sur I. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- Si la fonction f admet des primitives sur un intervalle I, alors pour tout nombre x_0 de I et tout réel y_0, il existe une primitive et une seule F telle que $F(x_0) = y_0$.
  On dit que f vérifie la condition initiale $F(x_0) = y_0$.

Théorème d'existence

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

3 Calculs de primitives

3.1 Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction primitive F (C désigne une constante)	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$\mathbf{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \dfrac{ax^2}{2} + bx + C$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbf{Z}^* \setminus \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbf{R}$ si $n > 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;-\infty[$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;-\infty[$

3.2 Formules générales

Théorèmes u et v désignent des fonctions continues sur un même intervalle I.

- Si U et V sont des primitives des fonctions u et v sur un intervalle I, alors la fonction $U + V$ est une primitive de $u + v$ sur I.
- Si U est une primitive de la fonction u sur un intervalle I, alors, quel que soit le réel k, la fonction kU est une primitive de la fontion ku sur I.

Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction	Une primitive	Condition
$u' + v'$	$u + v$	
ku'	ku	
$u'u^n$ $(n \in \mathbf{Z}^* \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\forall x \in I : u(x) \neq 0$ si $n \leqslant -2$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^{u}$	e^{u}	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$\forall x \in I : u(x) \neq 0$

4 Intégrale d'une fonction continue

4.1 Extension de la notion d'intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Soient a et b deux nombres quelconques de I.

Alors, l'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Notation

On écrit : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Conséquences

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

4.2 Linéarité de l'intégration

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et si k est un réel quelconque, alors, quels que soient les réels a et b de I :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (f+g)(t)\ \mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_a^b kf(t)\ \mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

4.3 Relation de Chasles

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors, quels que soient les réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$

4.4 Positivité de l'intégration

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I.

  Quels que soient a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Soient f et g deux fonctions continues sur I telles que $f \leqslant g$ sur I.

  Quels que soient a et b de I tels que $a \leqslant b$ on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

  Cette deuxième propriété découle de la première en intégrant $g - f$ entre a et b.

5 Extension de la notion d'aire

On a vu que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle était l'aire du « domaine sous la courbe ».
Cette notion d'aire se généralise dans le cas d'une fonction continue et négative sur un intervalle.
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,,b]$. Alors on sait que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < 0$.
Soit $\mathscr{D}$ le domaine $\{M(x\,,y)\,/a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$.
Alors, l'aire de ce domaine est donnée, en unités d'aires, par : aire $(\mathscr{D}) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

6 Valeur moyenne

6.1 Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
S'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(t) \leqslant M$ pour tout t de I, alors :

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M\,(b-a)$$

Pour obtenir ces inégalités, il suffit d'intégrer les inégalités $m \leqslant f(t) \leqslant M$ entre a et b.

6.2 Valeur moyenne d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels appartenant à I.
Alors il existe un réel c entre a et b tel que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = (b-a)\,f(c)$.

Démonstration dans le cas d'une fonction strictement croissante

On suppose $a < b$ et que la fonction f est strictement croissante sur I ; alors pour tout t tel que $a \leqslant t \leqslant b$, on a : $f(a) \leqslant f(t) \leqslant f(b)$.
En intégrant cette inégalité entre a et b, on obtient :
$(b-a)\,f(a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,f(b) \Leftrightarrow f(a) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(b)$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur I ; le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel c compris entre a et b tel que : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = f(c)$.
On peut démontrer l'existence du réel c si $a > b$, et si la fonction f n'est pas monotone sur I.

Définition

Le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.

Exemple

La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de sa vitesse entre deux instants t_1 et t_2, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{t_2-t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}}$

Chapitre 11 - Lois continues

1 Généralités

1.1 Intégrale indéfinie

On appelle **intégrale indéfinie** une intégrale dont au moins une des bornes est l'infini.

Exemples : $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \ln t\,\mathrm{d}t$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$:

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\left(\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

1.2 Densité de probabilité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue dont les valeurs ne sont pas regroupées en classes, l'histogramme des fréquences est remplacé par une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f possédant les trois propriétés suivantes :

- f est positive sur $\mathbf{R}$;
- f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

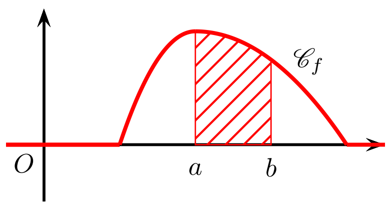
La fonction f est appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire.
Le plus souvent, on définira la fonction f sur un intervalle borné.

1.3 Loi continue

1.3.1 Définition

Pour une variable aléatoire continue X suivant une loi de probabilité dont la densité est f, on définit la probabilité sur un intervalle par :

$P(X \in [a\,;b]) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$; on la note $P([a\,;b])$.



L'aire sous la courbe vaut 1 ; la probabilité sur l'intervalle $[a\,;b]$ est l'aire de la partie hachurée.

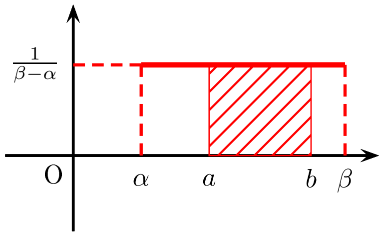
1.3.2 Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité ayant pour fonction de densité f est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Loi uniforme

Une variable aléatoire continue X suit une loi **uniforme** sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ quand la densité de probabilité est une fonction constante sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$.
Pour que l'aire sous la courbe soit égale à 1, il faut que la densité de probabilité prenne la valeur $\dfrac{1}{\beta-\alpha}$.

On a : $P([a\,;b]) = \dfrac{b-a}{\beta-\alpha}$.



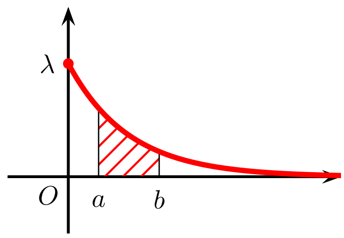
3 Loi exponentielle

3.1 Définition

Soit λ un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit la loi **exponentielle** de paramètre λ, appelée aussi **loi de durée de vie sans vieillissement**.



3.2 Conséquences

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) :

- $P(X \in [a\,,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$;
- pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \leqslant a) = P(X < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$;
- pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

3.3 Durée de vie sans vieillissement

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
Alors, pour tous réels positifs t et s : $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+s) = P(X \geqslant s)$.
C'est cette propriété qui donne à la loi exponentielle le nom de « durée de vie sans vieillissement ».

Démonstration

Pour tous réels positifs t et s : $P(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P(X \geqslant t+s) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$

$$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+s) = \frac{P[(X \geqslant t) \cap (X \geqslant t+s)]}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+s)}{P(X \geqslant s)}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = P(X \geqslant s)$$

Définition

Pour une loi exponentielle, on appelle **demi-vie** la durée x telle que : $P(X \leqslant x) = 0,5$.

3.4 Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Définition

L'espérance mathématique est définie, si cette limite existe, par : $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Théorème

Si la loi exponentielle a pour paramètre λ, alors son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration

On doit calculer $\displaystyle\int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ puis la limite de cette expression quand x tend vers $+\infty$.

- Soit g la fonction définie par $g(t) = \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
  On va chercher une primitive G de g sous la forme $G(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
  $G'(t) = a\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + (at+b)(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = (-\lambda a t + a - \lambda b)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
  Si $\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ a - \lambda b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$ alors $G'(t) = g(t)$. Donc $G(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

- $$\begin{aligned}\int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \left[\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(0-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{0} \\ &= \frac{1}{\lambda} - x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\end{aligned}$$

- On veut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\lambda} - x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]$.

  ▷ $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x) = -\infty \\ \text{on pose } y = -\lambda x \\ \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

  ▷ $x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\lambda x}} = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{\lambda x}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda x}}$

  ▷ $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda x) = +\infty \\ \text{on pose } y = \lambda x \\ \text{d'après le cours } \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{y}}{y} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

  ▷ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\lambda} - x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right] = \dfrac{1}{\lambda}$ et donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Remarque

Cette propriété de l'espérance mathématique est à savoir utiliser dans les deux sens, en fonction du texte : si on connaît le paramètre de la loi exponentielle, alors il faut savoir calculer l'espérance mathématique de cette loi, et si on connaît l'espérance mathématique, alors on peut calculer le paramètre de la loi exponentielle.

4 Exercices

4.1 Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ a(x-1) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Représenter f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Calculer : $P(X<0)$; $P(X \leqslant 1,5)$; $P(X<2)$; $P(X \leqslant 4)$; $P(X \geqslant 1,5)$; $P(1,5 \leqslant X \leqslant 2)$.

4.2 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ a\left(x^2-4x+3\right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Représenter f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Calculer : $P(X<0)$; $P(X \leqslant 1,5)$; $P(X<2)$; $P(X \leqslant 4)$; $P(X \geqslant 1,5)$; $P(1,5 \leqslant X \leqslant 2)$.

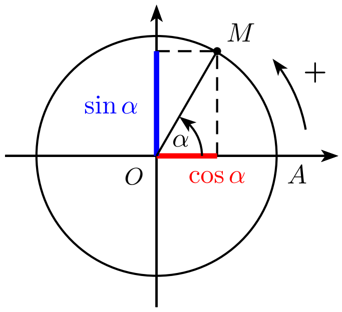
4.3 Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{3}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{2} & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Représenter f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Démontrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
4. Calculer : $P(X<2)$; $P(X \leqslant 3)$; $P(X \geqslant 1,5)$; $P(1,5 \leqslant X \leqslant 3)$.

Chapitre 12 - Fonctions trigonométriques

1 Définitions du cosinus et du sinus



On se place dans un cercle orienté de rayon 1 qu'on appelle **cercle trigonométrique**.
Si α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$, alors les coordonnées du point M sont $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.

Relation fondamentale : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

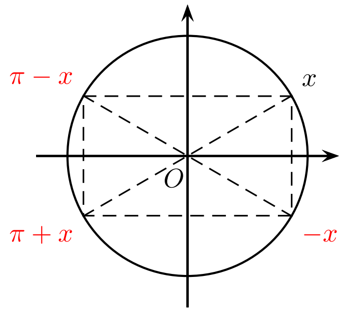
Pour tout réel α : $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$

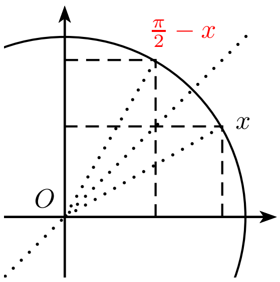
2 Angles associés

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$





Angles complémentaires

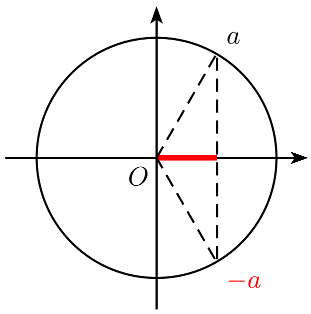
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

3 Équations trigonométriques

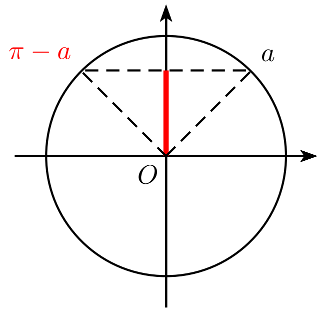
$\cos x = \cos a$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + k\,2\pi \\ \quad\text{ou} \\ x = -a + k\,2\pi \end{array} \right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

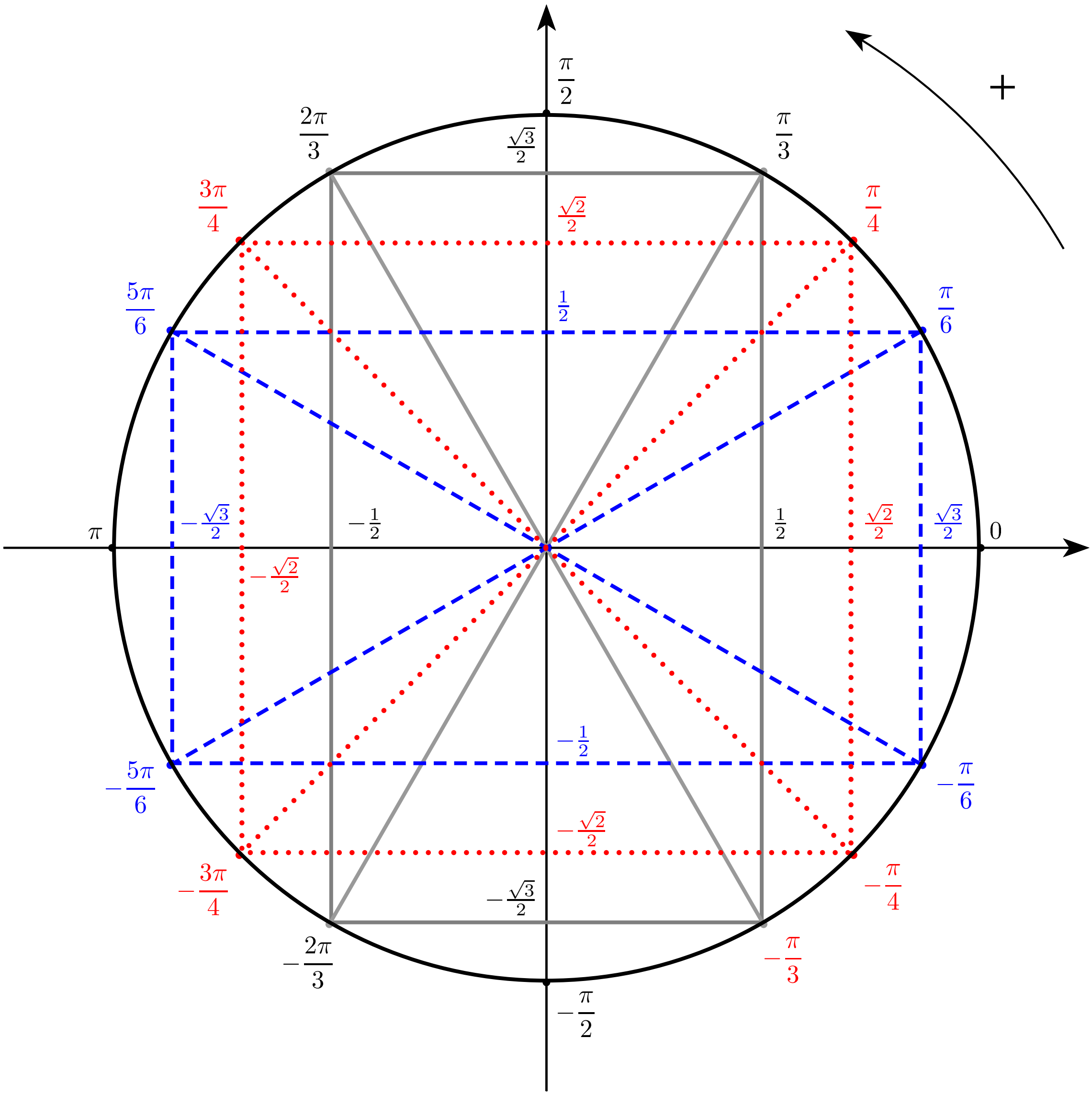


$\sin x = \sin a$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + k\,2\pi \\ \quad\text{ou} \\ x = \pi - a + k\,2\pi \end{array} \right. \qquad (k \in \mathbf{Z})$$



4 Cercle trigonométrique



5 Fonction cosinus

Ensemble de définition
La fonction cosinus est définie sur $\mathbf{R}$.

Périodicité
La fonction cosinus est périodique de période 2π. Cela signifie que, quel que soit le réel x : $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

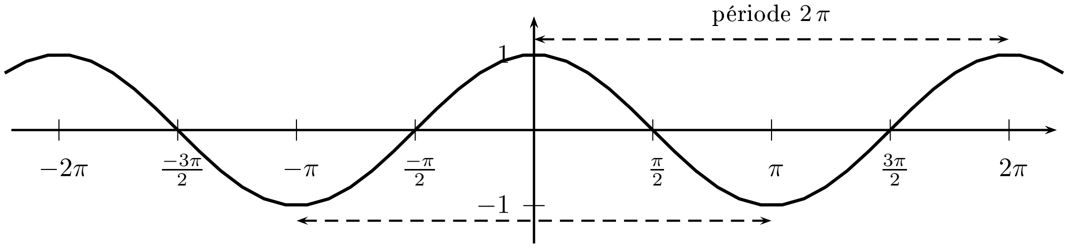
Parité
L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction cosinus est $\mathbf{R}$ donc, pour tout x de $\mathscr{D}$, alors $-x$ appartient à $\mathscr{D}$. De plus, pour tout x de $\mathscr{D}$, $\cos(-x) = \cos x$.
Donc la fonction cosinus est **paire** ; sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Dérivée
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Variations

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$\sin x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$-\sin x$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Représentation graphique



Fonction composée
Soient a et b deux réels ($a \neq 0$).
Alors la fonction $x \longmapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\boxed{(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)}$

6 Fonction sinus

Ensemble de définition
La fonction sinus est définie sur $\mathbf{R}$.

Périodicité
La fonction sinus est périodique de période 2π.
Cela signifie que, quel que soit le réel x : $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

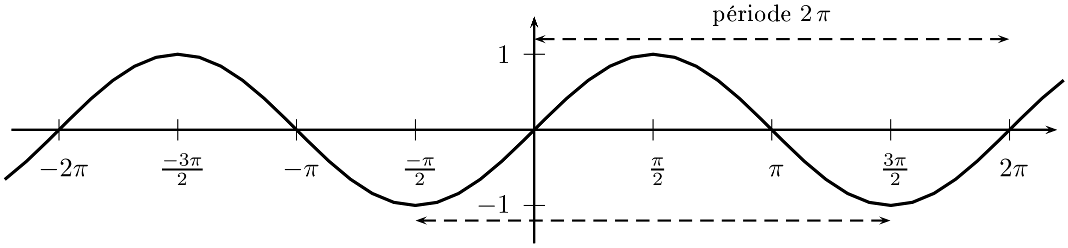
Parité
L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction sinus est $\mathbf{R}$ donc, pour tout x de $\mathscr{D}$, alors $-x$ appartient à $\mathscr{D}$. De plus, pour tout x de $\mathscr{D}$, $\sin(-x) = -\sin x$.
Donc la fonction sinus est **impaire** ; sa représentation graphique dans un repère est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

Dérivée
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

Variations

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$
$\cos x$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$\sin x$	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1

Représentation graphique



Fonction composée
Soient a et b deux réels ($a \neq 0$).
Alors la fonction $x \longmapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\boxed{(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)}$

Limite à connaître
En étudiant la limite du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, on démontre que $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1}$

Chapitre 13 - Produit scalaire dans l'espace

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **produit scalaire** de ces deux vecteurs, le nombre réel « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

1.2 Conséquences

- Si α est une mesure de l'angle géométrique $(\vec{u}\,,\vec{v})$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$.
  Donc si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
  Et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si A, B et C sont trois points non alignés et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

1.3 Expression analytique

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x\,,y\,,z)$ et $\vec{v}\,(x'\,,y'\,,z')$; alors leur produit scalaire est égal à $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

1.4 Règles de calcul

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ commutativité du produit scalaire
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ distributivité du produit scalaire sur l'addition
- $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab) \times (\vec{u}.\vec{v})$

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Vecteurs orthogonaux

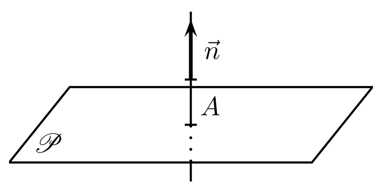
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, les trois points A, B et C étant définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2.2 Propriétés

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x\,,y\,,z)$ et $\vec{v}\,(x'\,,y'\,,z')$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

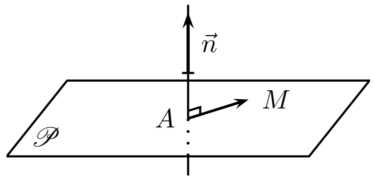
2.3 Vecteur normal à un plan

Un vecteur **normal** à un plan $\mathscr{P}$ est un vecteur $\vec{n}$ non nul dont la direction est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.



2.4 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite d est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.
Le plan qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.



2.5 Orthogonalité de droites

Théorème

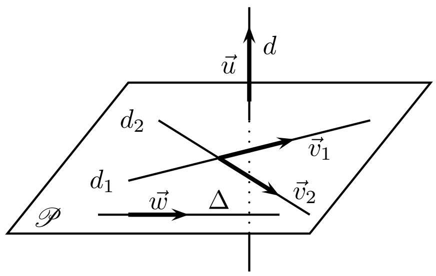
Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

On dira alors que la droite est perpendiculaire au plan (voir page 29).

Démonstration à connaître

Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ; seule la réciproque nécessite une démonstration.

Soit $\mathscr{P}$ un plan et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
On suppose que la droite d est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 du plan $\mathscr{P}$; on appelle v_1 et v_2 des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2. Comme la droite d est orthogonale aux deux droites d_1 et d_2, on sait que $\vec{u}.\vec{v_1} = 0$ et $\vec{u}.\vec{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan $\mathscr{P}$; si $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ, alors les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont coplanaires. Donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$.
$\vec{u}.\vec{w} = \vec{u}.\left(a\vec{v_1} + b\vec{v_2}\right) = a\times\vec{u}.\vec{v_1} + b\times\vec{u}.\vec{v_2} = 0$
Donc d est orthogonale à Δ.



3 Équation cartésienne d'un plan

Théorème

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère un point A et un vecteur non nul $\vec{n}\,(a\,,b\,,c)$; alors le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$
- Réciproquement, dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, l'ensemble des points $M\,(x\,,y\,,z)$ vérifiant une relation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $(a\,,b\,,c) \neq (0\,,0\,,0)$ est un plan dont un vecteur normal a pour coordonnées $(a\,,b\,,c)$.

Démonstration à connaître

- Soit $\vec{n}\,(a\,,b\,,c)$ un vecteur et $A\,(x_A\,,y_A\,,z_A)$ un point de l'espace.

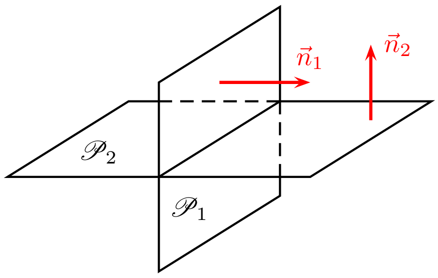
  Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$: $\mathscr{P} = \{M\,(x\,,y\,,z)\ /\ \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0\}$
  $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$
  Les coordonnées du point M du plan $\mathscr{P}$ vérifient une relation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

- Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x\,,y\,,z)$ vérifiant la relation $ax+by+cz+d=0$ où $(a\,,b\,,c\,,)\neq(0\,,0\,,0)$.
  Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a\,,b\,,c\,,)$; on sait que $\vec{n}\neq\overrightarrow{0}$.
  On cherche un point A quelconque de l'ensemble $\mathscr{E}$: si $a\neq 0$, on prend $A\left(-\dfrac{d}{a}\,,0\,,0\right)$.
  $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=ax+by+cz+d.$
  $M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\Leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ ce qui signifie que M appartient au plan contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,,b\,,c)$.

4 Plans perpendiculaires

Définition

Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.



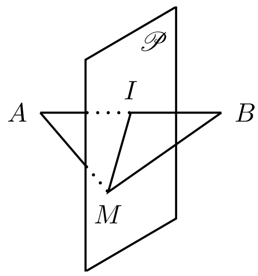
Théorème

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si deux vecteurs normaux quelconques à ces deux plans sont orthogonaux.

5 Applications

5.1 Plan médiateur

- Si A et B sont deux points de l'espace, la plan passant par I milieu de $[AB]$ et orthogonal à (AB) s'appelle le **plan médiateur** du segment $[AB]$.
- Ce plan médiateur est l'ensemble des points de l'espace situés à égale distance de A et de B.
- Pour déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et on détermine une équation du plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.



5.2 Équations de la sphère

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, une sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega\,,y_\Omega\,,z_\Omega)$ et de rayon r a pour équation : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2$

5.3 Plan passant par trois points

Trois points non alignés définissent un plan et un seul.
Pour déterminer une équation d'un plan passant par trois points non alignés A, B et C, on écrit que ce plan a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. On exprime ensuite que les points A, B et C appartiennent au plan, c'est-à-dire que leurs coordonnées vérifient l'équation du plan. On résout alors le système de 3 équations à 4 inconnues a, b, c et d obtenu ; pour cela on fixe une inconnue et on calcule les autres en fonction de celle-là par un système 3×3.

Chapitre 14 - Lois normales

1 Théorème de Moivre-Laplace

1.1 Théorème

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ de paramètres n et p. On appelle $E(X_n)$ son espérance mathématique et $\sigma(X_n)$ son écart type (racine carrée de sa variance).

Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous nombres a et b tels que $a \leqslant b$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a\,,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

1.2 Compléments

- Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a\,,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, on aura $\displaystyle P(Z_n \in [a\,,b]) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ si n est assez grand.
  On acceptera cette approximation si les trois conditions suivantes sont réalisées :
  - $n \geqslant 30$
  - $np \geqslant 5$
  - $n(1-p) \geqslant 5$
- Si ces trois conditions sont réalisées, on peut dire que la variable aléatoire Z_n suit une loi continue dont la fonction de densité est $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

2 Loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,,1)$

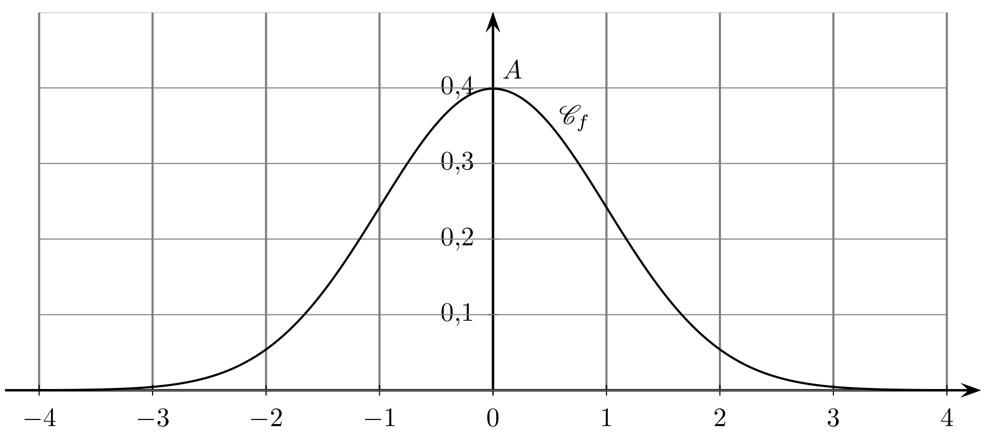
2.1 Définition et propriétés

Définition

Une variable aléatoire continue Z suit la loi **normale centrée réduite**, notée $\mathscr{N}(0\,,1)$, quand sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Représentation graphique de f

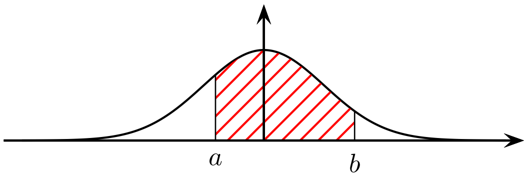


Propriétés de la courbe

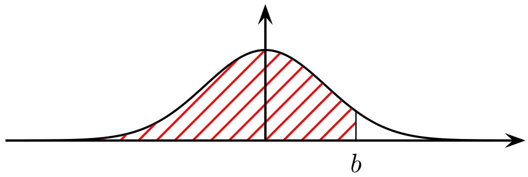
- $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car, pour tout x réel, $f(-x) = f(x)$. On utilise souvent cette propriété pour calculer des probabilités.
- L'ordonnée du sommet A de la courbe est égale à $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4$.
- L'aire du domaine illimité compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses est égale à 1 u.a. puisque f est une densité de probabilité.
- On dit que $\mathscr{C}_f$ est une « courbe en cloche » ; on l'appelle aussi « courbe de Gauss » ou « courbe de Laplace-Gauss » des noms des mathématiciens qui en ont étudié les propriétés les premiers.

2.2 Probabilité d'un événement

Si une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$ c'est-à-dire la loi continue de densité de probabilité $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, on peut visualiser les probabilités ainsi :

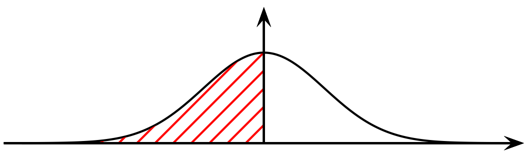


$$P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

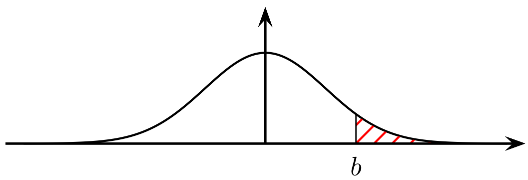


$$P(Z \leqslant b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

En utilisant la courbe, on peut dire :



$$P(Z \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$



$$P(Z \geqslant b) = 1 - P(Z < b)$$

Application

Soit x un réel positif.

1. Démontrer que $P(Z < -x) = 1 - P(Z \leqslant x)$.
2. Démontrer que $P(-x < Z < x) = 2\,P(Z \leqslant x) - 1$.

Remarque

On ne sait pas calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $[a\,, b]$.
On utilisera la calculatrice qui donne directement une valeur approchée de $P(a \leqslant Z \leqslant b)$.

2.3 Paramètres

2.3.1 Espérance mathématique

Pour une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $[a\,, b]$, l'espérance mathématique est donnée par $E(X) = \displaystyle\int_a^b t\, f(t)\, \mathrm{d}t$ (voir page 43).

Ce qui donne pour une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y t\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2.3.2 Variance et écart type

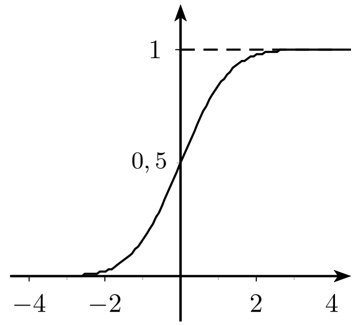
La variance de cette variable aléatoire, définie par $E\left((Z - E(Z))^2\right)$, est égale à 1.
Donc son écart type (racine carrée de la variance) est aussi égal à 1.

2.4 Intervalle centré en 0 de probabilité donnée

Fonction de répartition

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,,1)$.
On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction Φ par $\Phi(x) = P(Z \leqslant x)$;
on a aussi $\Phi(x) = P(Z < x)$.
Alors :

- Φ est continue sur $\mathbf{R}$;
- Φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.



Théorème d'existence

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,1)$.
Soit α un nombre de l'intervalle $]0\,,1[$.
Alors il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration à connaître

On a vu dans le paragraphe 2.2 que $P(-x < Z < x) = 2\,P(Z \leqslant x) - 1$; donc
$P(-x < Z < x) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2\,P(Z \leqslant x) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(Z \leqslant x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$
$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{\alpha}{2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$
On sait que :

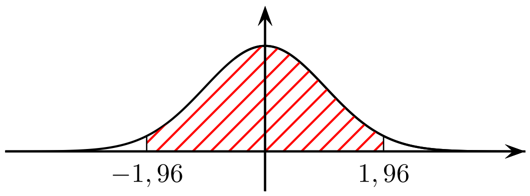
- la fonction Φ est continue strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$;
- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$;
- $1 - \dfrac{\alpha}{2} \in \left]\dfrac{1}{2}\,,1\right[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre unique c de $]0\,,+\infty[$ tel que $\Phi(c) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ autrement dit tel que $P(-c < Z < c) = 1 - \alpha$.
Comme ce nombre c dépend de α, on l'appelle u_α.
On a donc démontré que, pour tout réel α strictement positif, il existait un unique réel u_α strictement positif tel que $P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$.

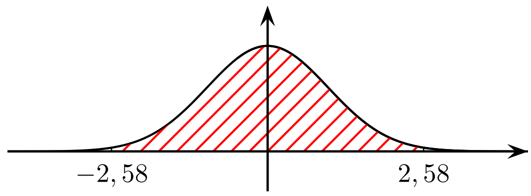
Application

On va déterminer le réel u_α pour deux valeurs de α : 0,05 et 0,01.

- 95 % ; $u_{0,05} \approx 1,96$ ce qui veut dire que $P(-1,96 < Z < 1,96) \approx 0,95$
- 99 % ; $u_{0,01} \approx 2,58$ ce qui veut dire que $P(-2,58 < Z < 2,58) \approx 0,99$



95 %



99 %

3 Loi normale $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$

3.1 Définition et propriétés

Définition

Une variable aléatoire continue X suit la loi **normale** $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$ si la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,,1)$.

Propriétés

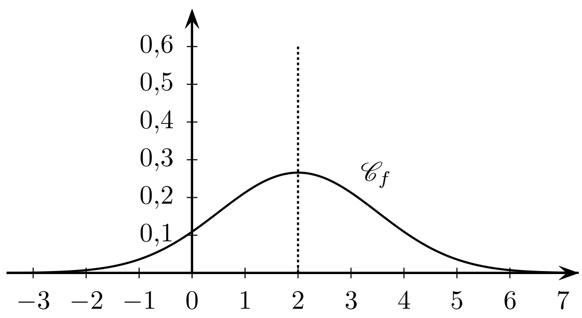
Si une variable aléatoire suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$ alors

- son espérance mathématique est égale à μ (nombre réel) ;
- son écart-type est égal à σ (réel strictement positif).

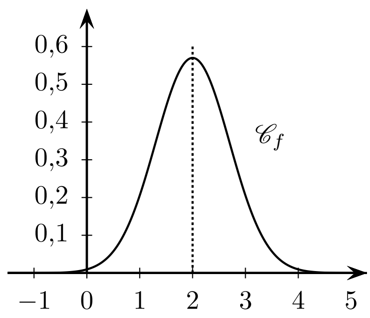
3.2 Courbe représentative et influence des paramètres

Propriété

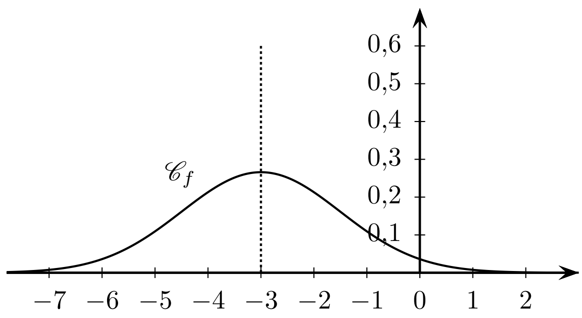
Soit f la fonction densité de la loi normale $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthogonal est une « courbe en cloche », symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ et d'autant plus « resserrée » autour de son axe de symétrie que σ est petit.



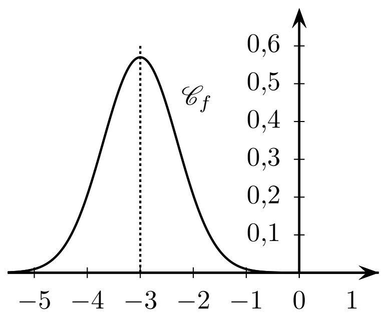
$\mu = 2$ et $\sigma = 1,5$



$\mu = 2$ et $\sigma = 0,7$



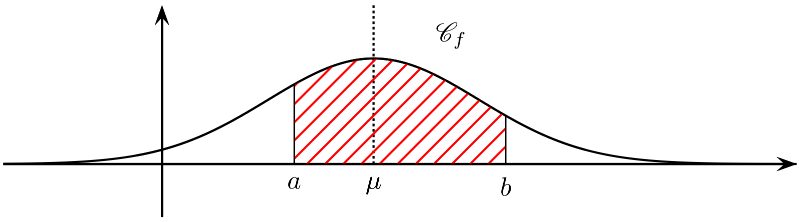
$\mu = -3$ et $\sigma = 1,5$



$\mu = -3$ et $\sigma = 0,7$

3.3 Calcul de la probabilité d'un événement

Une loi normale $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$ est une loi à densité donc il existe une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tous réels a et b, $P\,(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f\,(x)\;\mathrm{d}x$ où $f\,(x) = \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



$$P\,(X \in [a\,,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

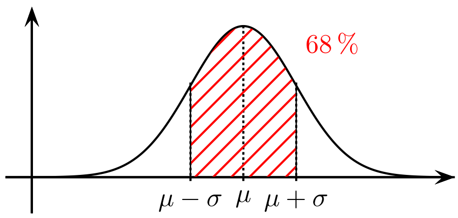
On ne sait pas non plus déterminer une primitive de cette fonction f ; donc pour calculer une probabilité, on utilisera la calculatrice qui donne directement une valeur approchée de $P\,(a \leqslant X \leqslant b)$.
Pour calculer $P\,(X > a)$ ou $P\,(X < a)$, on pourra aussi utiliser la symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ et la calculatrice.

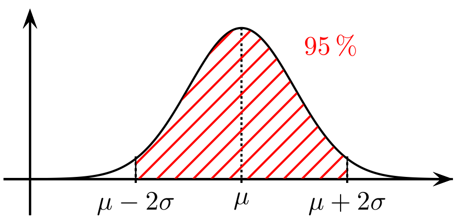
3.4 Les intervalles « un, deux, trois sigmas »

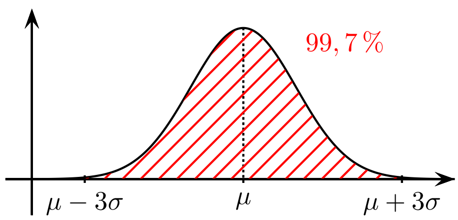
Propriété
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu\,,\sigma^2)$ de moyenne μ et d'écart type σ.

Alors :

- $P\,(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P\,(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
- $P\,(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$







4 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On a vu, dans le théorème de Moivre-Laplace, que sous certaines conditions, on pouvait approcher une loi binomiale par la loi normale centrée réduite ; plus précisément si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit la loi normale centrée réduite.

Mais si la variable aléatoire $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit la loi normale centrée réduite, cela veut dire que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne np et d'écart type $\sqrt{np(1-p)}$ (voir paragraphe 3.1 page 58).

4.1 Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ et si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- $n \geqslant 30$
- $np \geqslant 5$
- $n(1-p) \geqslant 5$

alors, on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ par la loi normale $\mathscr{N}\left(np\,,\left(\sqrt{np(1-p)}\right)^2\right)$ de moyenne np et d'écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

4.2 Exemple et correction de continuité

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50\,;0,5)$.
Or $n = 50 \geqslant 30$, $np = 25 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 25 \geqslant 5$.
Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale sont vérifiées ; on peut donc approcher $\mathscr{B}(50\,;0,5)$ par $\mathscr{N}(25\,;12,5)$ de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = \sqrt{12,5}$.
On écrit X quand on parle de la variable aléatoire qui suit la loi binomiale, et X_c pour celle qui suit la loi normale.

- Calcul de $P(X = 24)$
  On sait que $P(X_c = 24) = 0$ puisque la loi normale est une loi continue.
  En faisant l'approximation, on remplace une loi discrète par une loi continue ; on va donc « couper la poire en deux » et attribuer la moitié inférieure de l'intervalle $[23\,,24]$ au nombre 23 et la moitié supérieure de cet intervalle au nombre 24. On fait de même pour l'intervalle $[24\,,25]$. C'est ce qu'on appelle la « correction de continuité ».
  On va donc remplacer l'événement $(X = 24)$ par l'événement $(24 - 0,5 < X_c < 24 + 0,5)$.
  On prendra pour approximation de $P(X = 24)$ le nombre $P(24 - 0,5 < X_c < 24 + 0,5)$ c'est-à-dire le nombre $P(23,5 < X_c < 24,5)$.
  On trouve $P(X = 24) \approx 0,1080$ et $P(23,5 < X_c < 24,5) \approx 0,1081$.
- Calcul de $P(24 \leqslant X \leqslant 26)$
  $P(24 \leqslant X \leqslant 26) = P(X = 24) + P(X = 25) + P(X = 26) \approx 0,3282$.
  En appliquant la même correction de continuité, on aura :
  $P(24 - 0,5 \leqslant X_c \leqslant 26 + 0,5) = P(23,5 \leqslant X_c \leqslant 26,5) \approx 0,3286$.
- Cas général : correction de continuité

loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$	loi normale $\mathscr{N}(np\,,np(1-p))$
$P(X = t)$	$P(t - 0,5 < X_c < t + 0,5)$
$P(X < t)$	$P(X_c < t - 0,5)$
$P(X \leqslant t)$	$P(X_c < t + 0,5)$
$P(X > t)$	$P(X_c > t + 0,5)$
$P(X \geqslant t)$	$P(X_c > t - 0,5)$

Chapitre 15 - Échantillonnage - Estimation

1 Introduction

1.1 Identification de la situation

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant un très grand nombre de boules rouges et bleues.

Dans l'urne U_1, on **connaît** la proportion p de boules rouges.
On procède à des tirages avec remise de n boules et on observe la fréquence d'apparition d'une boule rouge. Cette fréquence observée appartient en général à un intervalle de centre p dont la longueur diminue quand n augmente.
On est dans le domaine de **l'échantillonnage** et de **l'intervalle de fluctuation**.

Dans l'urne U_2 on **ne connaît pas** la proportion de boules rouges.
On procède à des tirages avec remise de n boules et on va essayer d'estimer la proportion p de boules rouges dans l'urne en fonction des fréquences observées, proportion dont on n'a aucune idée *a priori*. Cette estimation se fait au moyen d'un intervalle qui va dépendre d'un **niveau de confiance** que l'on attribue à l'estimation.
On est dans le domaine de **l'estimation** et de **l'intervalle de confiance**.

1.2 Intervalle de fluctuation ou intervalle de confiance

On étudie un caractère dans une population donnée.

Échantillonnage	Estimation
On utilise un **intervalle de fluctuation** : • quand on connaît la proportion p de présence du caractère dans la population, OU • quand on fait une hypothèse sur la valeur de cette proportion ; on est alors dans un cas de **prise de décision**.	On utilise un **intervalle de confiance** quand on ignore la valeur de la proportion p de présence du caractère dans la population et qu'on ne formule pas d'hypothèse sur cette valeur.

2 Échantillonnage

2.1 Intervalle de fluctuation d'une fréquence

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ et α un réel de l'intervalle $]0\,,1[$.
Tout intervalle I pour lequel $P\left(\dfrac{X}{n} \in I\right) = 1-\alpha$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de la fréquence $\dfrac{X}{n}$ au seuil $1-\alpha$.

2.2 Intervalle de fluctuation asymptotique d'une fréquence

Théorème

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$. Soit α un réel de $]0\,,1[$.

Alors $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

où $$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\,, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

et u_α désigne l'unique réel tel que $P\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$ où Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0\,,1)$ (voir page 57).

Démonstration à connaître

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \\ &\Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \\ &\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \\ &\Leftrightarrow -u_\alpha \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha \Leftrightarrow -u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha \text{ en posant } Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de Moivre-Laplace (page 55) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha)$ où Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0\,,1)$.

Comme $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$

Application

Quand on sait qu'une suite converge vers une limite ℓ, on peut considérer que, pour n assez grand, le terme de rang n constitue une approximation de ℓ.

Ici, on inverse les rôles : on connaît la limite, mais pas les valeurs des termes de la suite. On admet donc que, sous certaines conditions, on peut approcher le terme de rang n de la suite $P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$ par sa limite $1 - \alpha$.

Les conditions communément admises pour pratiquer l'approximation sont :

$$n \geqslant 30,\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5$$

Définition

Un **intervalle de fluctuation asymptotique** de la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$ au seuil $1 - \alpha$ où $\alpha \in]0\,,1[$, est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ défini dans le théorème précédent, est un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ au seuil $1 - \alpha$.

2.3 Seuil de 95 %

Si $\alpha = 0,05$, on a vu que $u_\alpha \approx 1,96$ (page 57).

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ au seuil de 95 % pour une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ est

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Remarque

On a vu en seconde l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ que l'on obtient en majorant $\sqrt{p(1-p)}$.

2.4 Prise de décision

On observe une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p.
On formule donc l'**hypothèse** : « la proportion du caractère est p ».
Dans un échantillon de taille n de cette population, on observe la fréquence f de ce caractère.
On détermine l'intervalle de fluctuation I_n de la fréquence à 95 % dans les échantillons de taille n et on applique la règle de décision suivante :

- si $f \in I_n$ alors on considère que l'hypothèse n'est pas remise en question, et on l'accepte ;
- si $f \notin I_n$ alors on rejette l'hypothèse (au risque d'erreur de 5 %).

3 Estimation

Dans une population, la proportion p d'individus présentant un caractère donné est **inconnue**.
On prélève un échantillon de taille n et on étudie la fréquence du caractère dans cet échantillon.
On cherche alors à **estimer** la proportion p.

3.1 Intervalle de confiance

Définition

Un **intervalle de confiance** pour une proportion p au seuil de confiance de $1-\alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$.

Cet intervalle aléatoire est déterminé à partir de la variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.

Théorème

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$, où p désigne la proportion (inconnue) d'apparition d'un caractère, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la fréquence associée à X_n.

Pour n suffisamment grand, l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

Définition

Soit f la fréquence observée d'un caractère sur un échantillon de taille n,
et p désigne la proportion (inconnue) d'apparition de ce caractère dans la population.

Un **intervalle de confiance** de p au seuil de 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Cette approximation est considérée acceptable lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

3.2 Taille de l'échantillon

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance sont précis.

Chapitre 16 - Algorithmes

Un algorithme est une suite finie d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre un problème ; dans un deuxième temps, l'algorithme est codé dans un langage informatique, et constitue un programme.

1 Traitement séquentiel

On parle de `traitement séquentiel` pour exprimer que les instructions se déroulent les unes à la suite des autres, sans retour en arrière.
Exeemple : chercher l'image d'un nombre x par la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x - 5$.

Variables	x, y : nombres
Initialisation	entrer la valeur de x
Traitement	y prend la valeur $x^2 + 3x - 5$
Sortie	afficher « l'image de x est »
	afficher y

2 À propos des variables

Il est indispensable, au début d'un algorithme, de définir les variables avec lesquelles on va travailler ; de nombreux langages de programmation l'imposent également.
D'un point de vue informatique, on réserve, au début du programme, la place mémoire qui servira à faire tourner le programme ; on est alors certain de ne pas avoir de dépassement de capacité mémoire en lançant le programme.
Quand on a défini une variable de type « nombre », on a créé une boîte dans laquelle on peut placer un nombre. On peut lire et utiliser ce qui se trouve dans cette boîte, mais on ne pourra mettre qu'un seul nombre dans une boîte de type nombre : dès qu'on met un autre nombre dans la boîte, on efface le nombre qui y était précédemment.
En revanche, on peut copier le contenu d'une première boîte dans une seconde, ça n'efface pas le contenu de la première boîte.

L'algorithme ci-dessous sert à permuter les contenus des variables x et y ; on entre une valeur X dans la variable x, une valeur Y dans la variable Y et en fin d'algorithme, X se trouve dans la variable y et Y se trouve dans la variable x.

Comme on ne peut stocker qu'un seul nombre dans une variable, il faut utiliser une troisième variable, appelée ici a, pour effectuer la permutation.

Faire tourner l'algorithme ci-dessous en mettant 3 dans x et 9 dans y et remplir le tableau de « suivi de variables » :

Variables
(1) $x,\ a,\ y$: nombres
Initialisation
(2) Entrer x
(3) Entrer y
Traitement
(4) a prend la valeur x
(5) x prend la valeur y
(6) y prend la valeur a
Sortie
(7) Afficher x et y

ligne	x	a	y
(1)	?	?	?
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			
(6)			

3 Traitement séquentiel - Traitement conditionnel

Le `si ... alors ... sinon ...` permet de faire une action si une condition est vérifiée, et d'en faire une autre dans le cas contraire.
Le `sinon` est facultatif.

Exemple 1

Problème : on veut savoir si un nombre est divisible par 3.

Variables	n : nombre
Initialisation	entrer la valeur de n
Traitement	si $\dfrac{n}{3}$ est un nombre entier
	alors afficher « ce nombre est divisible par 3 »
	sinon afficher « ce nombre n'est pas divisible par 3 »
Fin	

Pour voir si le nombre $\dfrac{n}{3}$ est entier, on utilise la fonction « partie entière », notée E, en codant ainsi : si $E\left(\dfrac{n}{3}\right) = \dfrac{n}{3}$.

Exemple 2

Problème : résoudre une équation du second degré à coefficients réels.

Variables	a, b, c, d, r, s : nombres
Initialisation	entrer les valeurs de a, de b et de c
Traitement	d prend la valeur $b^2 - 4ac$
	si $d < 0$
	alors afficher « cette équation n'a pas de solution réelle »
	sinon r prend la valeur $\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}$
	s prend la valeur $\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$
	afficher « cette équation a pour solutions »
	afficher r et s
Fin	

On peut coder cet algorithme sur sa calculatrice.

Sur Texas Instruments

```
: Input "A :", A
: Input "B :", B
: Input "C :", C
: B*B - 4*A*C → D
: Disp "DELTA :", D
: If D < 0
: Then
: Disp "PAS DE RACINE"
: Else
: (-B – √(D))/(2A) → R
: (-B + √(D))/(2A) → S
: Disp "RACINES :"
: Disp R, S
: End
```

Sur CASIO

```
"A" ? → A ↵
"B" ? → B ↵
"C" ? → C ↵
B*B - 4*A*C → D ↵
"DELTA" ↵
D ◢
If D < 0 ↵
Then "PAS DE RACINE" ↵
Else (-B – √(D))/(2A) → R ↵
(-B + √(D))/(2A) → S ↵
"RACINES" ↵
R ◢
S ↵
IfEnd
```

4 Traitement itératif - Boucle `pour`

Quand on veut répéter une ou plusieurs instructions, on utilise des boucles.
On utilise la boucle `pour ... variant de ... à ...` lorsque l'on connait le nombre de tours de boucle que l'on veut faire.

Exemple 1

Problème : chercher le terme de rang n d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On veut calculer le terme de rang n.

Variables	n, i, u : nombres
Initialisation	entrer la valeur de n
	u prend la valeur 2
Traitement	pour i variant de 1 à n
	u prend la valeur $3u + 1$
Sortie	afficher u

Dans cet algorithme, la variable de boucle i est gérée automatiquement par la structure `pour` : à chaque tour de boucle, la variable de boucle i est incrémentée (augmentée) de 1.

On peut rajouter une ligne à l'intérieur de la boucle pour faire afficher tous les termes de la suite de rangs 1 à n ; l'affichage du terme de rang n en dernière ligne est alors superflu.

Variables	n, i, u : nombres
Initialisation	entrer la valeur de n
	u prend la valeur 2
Traitement	pour i variant de 1 à n
	u prend la valeur $3u + 1$
	afficher u
Fin	

Exemple 2

Problème : on lance n fois deux dés bien équilibrés et on fait la somme des numéros situés sur les faces supérieures.

Variables	n, i, r : nombres
	ℓ : liste
Initialisation	entrer la valeur de n
	on met à 0 tous les termes de la liste entre 2 et 12
Traitement	pour i variant de 1 à n
	r prend la valeur aléa$(1, 6)$ + aléa$(1, 6)$
	on ajoute 1 au terme de rang r de la liste ℓ
Sortie	afficher la liste ℓ entre 2 et 12

Dans cet algorithme, l'instruction aléa$(1, 6)$ donne un nombre entier au hasard entre 1 et 6.
Ajouter 1 au terme de rang r de la liste ℓ se code souvent : $\ell\,[r]$ reçoit $\ell[r] + 1$. L'affichage de la liste ℓ peut aussi nécessiter l'utilisation d'une boucle :

pour i variant de 2 à 12
    afficher $\ell[i]$

5 Traitement itératif - Boucle `tant que`

Quand on ne connait pas le nombre de tours de boucle qu'il faut faire, on utilise un autre type de boucle, la boucle `tant que`.
Dans ce cas, il faut impérativement modifier la condition d'entrée dans la boucle (ce qui est après le `tant que`) à l'intérieur de la boucle, sinon on entre dans une boucle infinie !

Exemple

Problème : déterminer le plus petit entier n_0 tel que, à partir de n_0, tous les termes d'une suite (u_n) sont plus grands qu'un nombre N.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Variables	N, i, u : nombres
Initialisation	entrer la valeur de N
	u prend la valeur 2
	i prend la valeur 0
Traitement	tant que $u \leqslant N$
	i prend la valeur $i + 1$
	u prend la valeur $3u + 1$
Sortie	afficher i

Il faut bien sûr des conditions à la suite (u_n) pour que le problème soit possible : dans cet exemple, la suite est croissante et a pour limite $+\infty$, donc la condition d'arrêt du `tant que` sera vérifiée à partir d'un rang n.

Il suffit de rajouter une ligne dans la boucle pour faire afficher, à chaque étape, le terme de rang i :

Variables	N, i, u : nombres
Initialisation	entrer la valeur de N
	u prend la valeur 2
	i prend la valeur 0
Traitement	tant que $u \leqslant N$
	i prend la valeur $i + 1$
	u prend la valeur $3u + 1$
	afficher u
Sortie	afficher i

Sommaire