France – Métropolitaine Juin 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1 : Résoudre dans C l'équation (1) : $\dfrac{z-2}{z-1} = z$. On donnera le module et un argument de chaque solution.

2 : Résoudre dans C l'équation (2) : $\dfrac{z-2}{z-1} = \mathrm{i}$. On donnera la solution sous forme algébrique.

3 : Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z , 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.

***a* :** Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

***b* :** Retrouver géométriquement la solution de (2).

4 : *a* : Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans C : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i}$ où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

***b* :** Résoudre dans C l'équation (3) : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i}$. On cherchera les solutions sous forme algébrique.

CORRECTION

1: L'équation (1) peut s'écrire : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Equation du second degré de discriminant – 4. Les solutions sont (1 + i) et (1 – i).

Le module des ces deux solutions est $\sqrt{2}$. La première a un argument égal à $\dfrac{\pi}{4}$, la seconde *a* un argument égal à $-\dfrac{\pi}{4}$.

2: L'équation (2) s'écrit: $z - 2 = \mathrm{i}\, z - \mathrm{i}$, ou encore $z\,(1 - \mathrm{i}) = 2 - \mathrm{i}$ et finalement $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})\,(1+\mathrm{i})}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

3: *a*: $\dfrac{z-2}{z-1}$ a pour argument l'angle ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $\dfrac{\pi}{2}$ et pour module le rapport des longueurs MA et MB.

***b*:** La solution de l'équation (2) correspond au point M tel que l'angle ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $\dfrac{\pi}{2}$ et tel que M soit équidistant des points A et B.

On le construit en plaçant les points A et B, puis en traçant le cercle de diamètre AB, puis la médiatrice de [AB]. On obtient deux points d'intersection entre ce cercle et cette droite. L'un correspond à l'équation (2), l'autre, à l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = -\mathrm{i}$.

Remarquons que la médiatrice de [AB] est la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.

Cette petite remarque permet de finir l'exercice.

4: *a*: Toute solution de $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i}$ doit vérifier, en considérant les modules : $\left|\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = |-\mathrm{i}\,| = 1$.

Comme $|\,z^n\,| = 1$ si et seulement si $|\,z\,| = 1$, on en déduit que toute solution de l'équation doit vérifier : $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = 1$.

Ceci signifie que le point M d'affixe z est équidistant des points A et B, donc que son abscisse est égale à $\dfrac{3}{2}$, donc que la partie réelle de z est bien $\dfrac{3}{2}$.

***b*:** D'après la question précédente, toute solution de cette équation doit avoir une partie réelle égale à $\dfrac{3}{2}$. Donc, les solutions sont de la forme : $z = \dfrac{3}{2} + i\,y$, où y est un réel. L'équation s'écrit alors: $\left(\dfrac{-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\;y}{\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\;y}\right)^2 = \mathrm{i}$

Ce qui donne : $(-1 + 2\,\mathrm{i}\,y)^2 = \mathrm{i}\,(1 + 2\,\mathrm{i}\,y)^2$ soit en développant : $1 - 4\,\mathrm{i}\,y - 4\,y^2 = \mathrm{i}\,(1 + 4\,\mathrm{i}\,y - 4\,y^2)$

$1 - 4\,y^2 - 4\,\mathrm{i}\,y = -4\,y + \mathrm{i}\,(1 - 4\,y^2)$ d'où, en égalant les parties réelles et imaginaires : $1 - 4\,y^2 = -4\,y$ soit $4\,y^2 - 4\,y - 1 = 0$

Les solutions de cette dernière équation sont : $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, d'où, la forme algébrique des solutions de l'équation (3) : $z = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $z = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.