La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Tous les résultats seront arrondis à10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question 1. *b*.. Quel commentaire peut-on faire ?

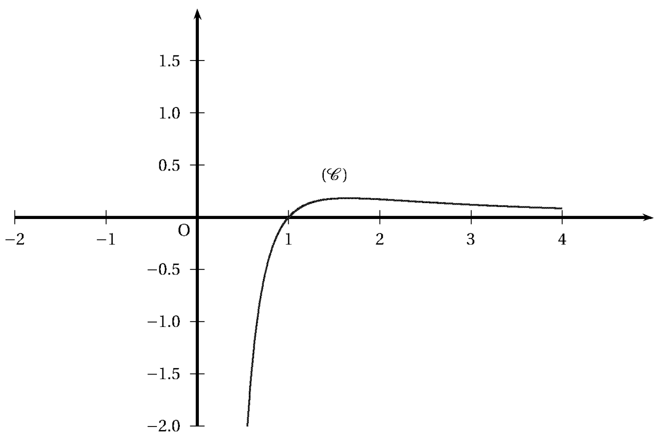
EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur] 0 ; + ∞[par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Sa courbe représentative ($\mathscr{C}$), construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés ci-dessous.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

1. Le tableau de variations de *f* donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum. Énoncer puis démontrer ces propriétés.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il des tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par : $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. *a*. Que représente *f* pour la fonction *g* ?

b. En déduire le sens de variations de *g* sur] 0 ; + ∞[.

2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3. *a*. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

b. Déterminer la limite de *g* en + ∞.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) u_{n-1} + \dfrac{6}{n}$.

1. *a*. Calculer u_1.

b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :

45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.

Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question 1. *b*..

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_{B} du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_{C} du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. *a*. Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b. Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b. Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier.

4. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Donner l'écriture complexe de h.

b. Calculer $z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}$. En déduire que A est le milieu du segment [QR].

c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

EXERCICE 4 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 2 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 5 + 2\,\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = \mathrm{i}$.

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

b. En déduire l'affixe de C′, symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (D) d'équation $4x + 3y = 1$.

d. Vérifier que le point C′ appartient à (D).

2. a. Démontrer que les droites (D) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (D) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,; y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.

b. Déterminer les points de (D) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

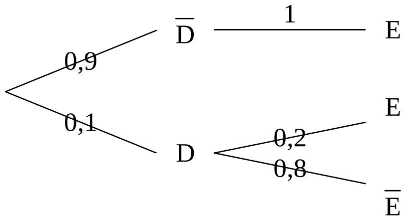
CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. *a*. X suit une loi binomiale de paramètres (8 ; 0,1).

b. $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{X} = 0) = 0{,}43$; $p(\mathrm{B}) = p\ (\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$; $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{X} = 2) = 0{,}14$

2. *a*.



2. *b*. $p(\mathrm{E}) = p(\overline{\mathrm{D}}) + p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{E}}) \times p(\mathrm{D})$ donc $p(\mathrm{E}) = 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}92$

2. *c*. $p(\mathrm{D} / \mathrm{E}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{E})}{p(\mathrm{E})} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}92}$ donc $p(\mathrm{D} / \mathrm{E}) \approx 0{,}022$ à 10^{-3} près.

3. On a une succession de 8 expériences aléatoires identiques et indépendantes donc la variable aléatoire Y comptant le nombre de stylo avec un défaut suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 0{,}022$

La probabilité qu'il n'*y* ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est : $p(\mathrm{Y} = 0) = (1 - 0{,}022)^{8} = 0{,}84$ à 10^{-2} près.

Conclusion : ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$, f est croissante sur $\left]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

f admet un maximum pour $x = e^{\frac{1}{2}}$ et $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2\,e}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

f est définie dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2\,x\ln x}{x^4} = \dfrac{x - 2\,x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$x > 0$ donc $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - 2\ln x$,

$1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ donc $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}\right]$.

f est croissante sur $\left]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ donc f admet un maximum pour $x = e^{\frac{1}{2}}$

$\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e$ donc $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2\,e}$.

2. La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse a ($a > 0$) a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Cette tangente contient le point O origine du repère si et seulement si $-a\,f'(a) + f(a) = 0$

soit $a\,\dfrac{1 - 2\ln a}{a^3} = \dfrac{\ln a}{a^2} \Leftrightarrow 1 - 2\ln a = \ln a \Leftrightarrow \ln a = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{3}}$

$\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{1}{3}$ donc $1 - 2\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{1}{3}$ et $\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3 = e$ donc $f'(a) = \dfrac{1}{3\,e}$.

Il existe donc une seule tangente à C contenant O : c'est la tangente au point d'abscisse $e^{\frac{1}{3}}$, elle a pour équation : $y = \dfrac{1}{3\,e}\,x$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par : $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

1. *a.* f est continue sur] 0 ; + ∞[donc g est la primitive nulle en 1 de f, donc sur] 0 ; + ∞ [$f = g'$.

b. Pour tout x de] 0 ; + ∞[, $g'(x) = f(x)$ donc $g'(x)$ a le même signe que $\ln x$ donc :

si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$; si $x = 1$, $g'(1) = 0$ et si $x > 1$ $g'(x) > 0$

2. f est continue positive sur [1 ; 3] donc g (3) est l'aire (en unités d'aire) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$

f est continue négative sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ donc l'aire (en unités d'aire) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{1}{2}$ est égale à $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{\ln t}{t^2}\,dt = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. *a.* Soit $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t^2} & \text{alors} \quad u(t) = -\dfrac{1}{t} \\ v(t) = \ln t & \text{alors} \quad v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ donc $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\,dt$

$g(x) = -\dfrac{1}{x}\ln x - \left[\dfrac{1}{t}\right]_1^x = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + 1$ donc $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1. *a.* $u_1 = (1 + 2)\, u_0 + 6 = 21$

b.

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96

la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$ semble donc être arithmétique de premier terme $d_1 = 16$ et de raison 8.

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$ donc $v_n = 16 + 8\,n$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_n = n\frac{v_0+v_{n-1}}{2} = n\frac{16+16+8(n-1)}{2} = n\frac{8n+24}{2} = 4\,n^2 + 12\,n$$

3. $u_0 = 5$ or si $n = 0$, $4\,n^2 + 12\,n + 5 = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que pour tout entier naturel n si $u_n = 4\,n^2 + 12\,n + 5$ alors $u_{n+1} = 4\,(n + 1)^2 + 12\,(n + 1) + 5 = 4\,n^2 + 20\,n + 21$

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\times(4\,n^2 + 12\,n + 5) + \frac{6}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,[(n + 3)\,(4\,n^2 + 12\,n + 5) + 6\,]$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,(4\,n^3 + 24\,n^2 + 41\,n + 21)$$

or $(4\,n^2 + 20\,n + 21)\,(n + 1) = 4\,n^3 + 24\,n^2 + 41\,n + 21$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(n + 1)\,(4\,n^2 + 20\,n + 21) = 4\,n^2 + 20\,n + 21$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. $d_n = u_{n+1} - u_n = 4\,n^2 + 20\,n + 21 - (4\,n^2 + 12\,n + 5) = 8\,n + 16$ donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison 8.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$

L'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

2. *a.* Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$ donc OA = OB = OC = 1 donc (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

b. Par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$, $r(A) = B$ et $r(B) = C$ donc AB = AC et $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$.

or $(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \pi + (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC})$ donc $(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$ à 2π près.

Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ donc est équilatéral.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport − 2.

b. h transforme A en P, B en Q et C en R, or une homothétie conserve les angles orientés donc transforme le triangle équilatéral ABC en le triangle équilatéral PQR.

4. *a.* L'écriture complexe de h est de la forme $z' = -2\,z + b$, O est le centre de l'homothétie donc est invariant par h donc $b = 0$

L'écriture complexe de h est $z' = -2\,z$.

b. Le triangle ABC est équilatéral, le cercle (C) de centre O et de rayon 1 est le cercle circonscrit au triangle ABC donc O est aussi le centre de gravité de ce triangle donc $z_O = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$, donc $z_A + z_B + z_C = 0$

h transforme B en Q et C en R, donc $z_Q = -2\,z_B$ et $z_R = -2\,z_C$ donc $z_A = -z_B - z_C = \frac{1}{2}(z_Q + z_R)$ donc A est le milieu du segment [QR].

c. (OA) est la médiatrice de [BC] donc est perpendiculaire à (BC). h transforme B en Q et C en R, donc (QR) est parallèle à (BC) donc (OA) est perpendiculaire à (QR) or A est un point de (QR) donc le rayon [OA] du cercle (C) est perpendiculaire en A à (QR) donc (QR) est la tangente en A à (C).

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = i$. s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. s_1 est la réflexion d'axe (AB) donc une similitude indirecte donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ telle que A et B soient invariants par s_1 donc $\begin{cases} 2+i = a(2-i)+b \\ 5+2i = a(5-2i)+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+i = a(2-i)+b \\ 5+2i-(2+i) = a[(5-2i)-(2-i)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+i = a(2-i)+b \\ 3+i = a(3-i) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+i = a(2-i)+b \\ \dfrac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+i = a(2-i)+b \\ a = \dfrac{8+6i}{10} = \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+i = \left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)(2-i)+b \\ a = \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i \\ a = \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i \end{cases}$

s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)\bar{z} - \dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

b. l'affixe c' de C' est telle que $c' = \left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)(-i) - \dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i = \dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$.

c. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels alors $z' = \left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)(x-iy) - \dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$ donc $z' = \left(\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{1}{5}\right)+i\left(\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+\dfrac{3}{5}\right)$

donc z' est imaginaire pur si et seulement si $\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{1}{5} = 0$ donc l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (D) d'équation $4x + 3y = 1$.

d. Le point C' a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ or $4\times\dfrac{2}{5}+3\times\left(-\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{8-3}{5} = 1$ donc le point C' appartient à (D).

2. *a.* La droite (AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1}{3}$ donc a une équation cartésienne de la forme $y = \dfrac{1}{3}x + b$

$A \in (AB)$ donc $1 = \dfrac{1}{3} \times 2 + b$ donc $b = \dfrac{1}{3}$. La droite (AB) a pour équation cartésienne $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ soit $x - 3y = -1$

Le point commun aux deux droites vérifie : $\begin{cases} x-3y = -1 \\ 4x+3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y = -1 \\ L_1+L_2 \quad 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Les droites (D) et (AB) sont sécantes en un point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1}{3}i$.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (D) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$.

s_2 et s_1 sont deux similitudes indirectes de rapport 1 donc leur composée f est une similitude directe de rapport 1.

c. $\Omega \in (AB) \cap (D)$ donc $s_1(\Omega) = \Omega$ et $s_2(\Omega) = \Omega$ donc $f(\Omega) = \Omega$.

$s_1(C) = C'$ et $C' \in (D)$ donc $s_2(C') = C'$ donc $f(C) = C'$.

d. f est une similitude directe de rapport 1, n'est pas une translation ni l'identité ($f(\Omega) = \Omega$ et $f(C) \neq C$) donc f est une rotation de centre Ω.

3. *a.* Le couple $(1 ; -1)$ est solution de $4x + 3y = 1$.

$\begin{cases} 4x+3y = 1 \\ 4\times1+3\times(-1) = 1 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $4(x-1) + 3(y+1) = 0$ soit $4(x-1) = -3(y+1)$

4 et 3 sont premiers entre eux et 4 divise $-3(y+1)$ donc 4 divise $y + 1$, il existe un entier relatif k tel que $y + 1 = 4k$

En remplaçant dans $4(x-1) = -3(y+1)$ alors $x - 1 = -3k$ donc $x = -3k + 1$

Vérification : $4x + 3y = 4(-3k+1) + 3(4k-1)$ donc $4x + 3y = -12k + 4 + 12k - 3 = 1$ donc les solutions de $4x + 3y = 1$ sont les couples $(-3k + 1 ; 4k - 1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. $OM^2 = x^2 + y^2$,

M est un point de (D) à coordonnées entières donc $x = -3k + 1$; $y = 4k + 1$ donc $OM^2 = (-3k+1)^2 + (4k-1)^2$

$OM^2 = 25k^2 - 17k + 2$ donc $OM^2 \leq 81 \Leftrightarrow 25k^2 - 14k - 79 \leq 0$

$\Delta = 14^2 + 4 \times 25 \times 79 = 4 \times 2024$ donc $25k^2 - 14k - 79 \leq 0$ si et seulement si $\dfrac{7-\sqrt{2024}}{25} \leq k \leq \dfrac{7+\sqrt{2024}}{25}$

$\dfrac{7-\sqrt{2024}}{25} \approx -1{,}5$ et $\dfrac{7+\sqrt{2024}}{25} \approx 2{,}1$ donc la distance au point O est inférieure à 9 si $-1 \leq k \leq 2$ donc pour les points :

$M_{-1}(4 ; -5)$; $M_0(1 ; -1)$; $M_1(-2 ; 3)$ et $M_2(-5 ; 7)$.