Exercice 1 (5 points)
Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.
Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours.
Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.
Pour t appartenant à [0 ; 30] , on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0{,}01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur [0, 30] est dérivable, strictement positive et vérifie $y' = 0{,}05\, y\, (10 - y)$.

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \dfrac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\, z + 0{,}05 \end{cases}$.

2. *a*) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin.
Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10% des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.
1. Montrer que la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

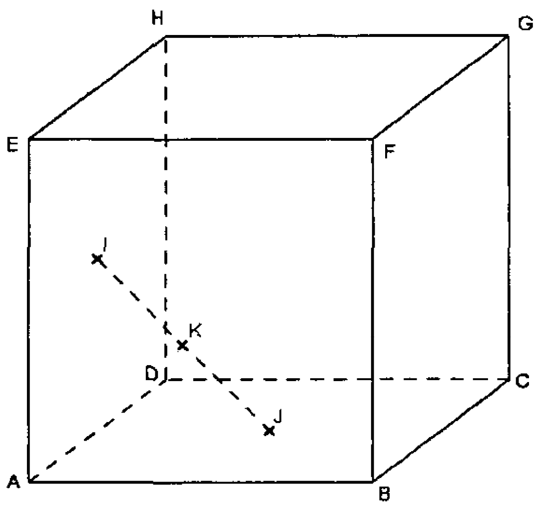
Exercice 2 (5 points)
Partie A : Restitution organisée de connaissances
On supposera connus les résultats suivants
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.
• Si $u \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
• Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. *a*. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] , $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq 1$.
b. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq u_0 \leq 1$.
2. Calculer u_1.
3. *a*. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$.
b. Étudier les variations de la suite (u_n).
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (5 points)
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On note 1 le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [I J]. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. *a*) Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).
c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points

A, D et G. Soit L le centre du carré DCGH.

a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 4 (5 points) (enseignement obligatoire)

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

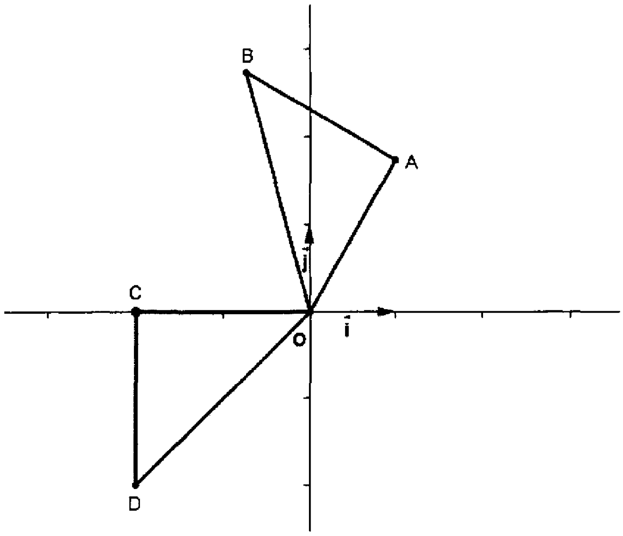
et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\,\mathrm{i}$.

Partie A Étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.

La figure est donnée ci-contre.



1\. *a*. Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2\. Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2\,\mathrm{i}$.

3\. *a*. Montrer que la droite (AC) a pour équation :

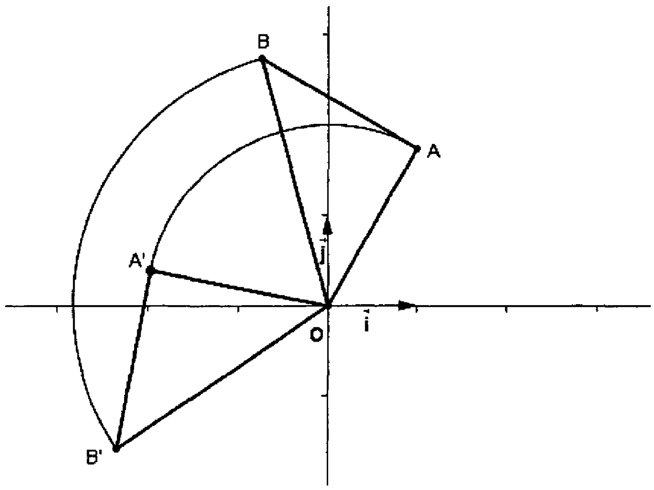
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2).$$

b. Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B Étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]\,0\,;2\,\pi\,[$. On considère la rotation de centre O et d'angle θ. On note A' le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B' le point d'affixe f , image du point B par la rotation r.

La figure est donnée ci-dessous.



L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment [BB'] en son milieu.

1\. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.

2\. Soit P le point d'affixe p milieu de [AA'] et Q le point d'affixe q milieu de [BB'].

a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.

b. Démontrer que $\frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}$.

c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA') .

Exercice 4 (5 points) (enseignement de spécialité)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1\. On considère l'équation (E) : $23\,x + 47\,y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23\,x \equiv 1$ (47).

2\. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $a\,b \equiv 0$ (47) alors $a \equiv 0$ (47) ou $b \equiv 0$ (47).

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1$ (47) alors $a \equiv 1$ (47) ou $a \equiv -1$ (47).

3\. *a*. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1$ (47) .

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1$ (47) .

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1$ (47), $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1$ (47), $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1$ (47).

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c. Montrer que $46\,! \equiv -1$ (47).

CORRECTION

Exercice 1

Partie A :

1. La fonction y définie sur [0, 30] est dérivable, strictement positive donc la fonction z est définie sur l'intervalle [0 ; 30], dérivable, strictement positive, $z = \dfrac{1}{y}$ donc $y = \dfrac{1}{z}$ donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$ et $z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 100$

la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ -\dfrac{z'}{z^2} = 0{,}05 \times \dfrac{1}{z}\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ -z' = 0{,}05 \times (10\,z - 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\,z + 0{,}05 \end{cases}$.

2. *a*) $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\,z + 0{,}05 \end{cases}$ donc $z(t) = \text{A e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}1$ de plus $z(0) = 100$ donc $\text{A} + 0{,}1 = 100$ donc $\text{A} = 99{,}9$

$\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\,z + 0{,}05 \end{cases} \Leftrightarrow z(t) = 99{,}9\ \text{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}1$

$y = \dfrac{1}{z}$ donc $y(t) = \dfrac{1}{99{,}9\ \text{e}^{-0{,}5\,t} + 0{,}1}$

b) Après 30 jours, le pourcentage de la population infectée est $y(30) = \dfrac{1}{99{,}9\ \text{e}^{-0{,}5\times 30} + 0{,}1} \approx 10\ \%$

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin.

1. En faisant un tableau :

	V	$\overline{\text{V}}$	Total
M	25 – 23 = 2	10 – 2 = 8	10
$\overline{\text{M}}$	25 × 0,92 = 23	90 – 23 = 67	90
Total	25	75	100

$p(\overline{\text{V}} \cap \text{M}) = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$

2. $p_{\overline{\text{V}}}(\text{M}) = \dfrac{8}{75} \approx 0{,}11$

Exercice 2

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \le g(x)$ donc $g(x) - f(x) \ge 0$

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\text{d}\,x \ge 0$

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\text{d}\,x = \int_a^b g(x)\,\text{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\text{d}\,x$

et $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\text{d}\,x \ge 0$ donc $\int_a^b g(x)\,\text{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\text{d}\,x \ge 0$ soit $\int_a^b g(x)\,\text{d}\,x \ge \int_a^b f(x)\,\text{d}\,x$

Partie B

1. *a*. Pour tout x de [0 ; 1], $0 \le x^2 \le 1$ donc $-1 \le -x^2 \le 0$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\text{e}^{-1} \le \text{e}^{-x^2} \le \text{e}^0$ or $\text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $\text{e}^0 = 1$ donc $\dfrac{1}{\text{e}} \le f(x) \le 1$.

b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de [0 ; 1], $\dfrac{1}{\text{e}} \le f(x) \le 1$ donc $\int_0^1 1\,\text{d}\,x \le \int_0^1 f(x)\,\text{d}\,x \le \int_0^1 \dfrac{1}{\text{e}}\,\text{d}\,x$

or $\int_0^1 1\,\text{d}\,x = 1 - 0 = 1$ et $\int_0^1 \dfrac{1}{\text{e}}\,\text{d}\,x = \dfrac{1}{\text{e}} \int_0^1 1\,\text{d}\,x = \dfrac{1}{\text{e}}$

soit $\dfrac{1}{\text{e}} \le \int_0^1 f(x)\,\text{d}\,x \le 1$ donc $\dfrac{1}{\text{e}} \le u_0 \le 1$.

2. $u_1 = \int_0^1 x\,f(x)\,\text{d}\,x$ Soit $u(x) = -x^2$ alors $u'(x) = -2\,x$ donc $x\ \text{e}^{-x^2} = -\dfrac{1}{2}u'(x)\ \text{e}^{u(x)}$ donc une primitive de $x\ \text{e}^{-x^2}$ est $-\dfrac{1}{2}\,\text{e}^{u(x)}$

soit $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $u_1 = \left[-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2}$ ou $u_1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2\,\mathrm{e}}$.

3. *a*. Pour tout entier naturel n, pour tout x de [0 ; 1], $x^n \geq 0$ et $f(x) \geq 0$ donc $x^n f(x) \geq 0$
pour tout entier naturel n, les fonctions $x \to x^n$ et f sont continues sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 x^n\ f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0$ donc $0 \leq u_n$.

b. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_0^1 x^n\ f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 x^n\ (x-1)\ f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$u_{n+1} - u_n = -\int_0^1 x^n\ (1-x)\ f(x)\,\mathrm{d}\,x$

pour tout entier naturel n, les fonctions $x \to x^n$; $x \to 1 - x$ et f sont continues et positives sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 x^n\ (1-x)\ f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0$
donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente et sa limite est positive.

4. *a*. Pour tout x de [0 ; 1] $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq 1$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq x^n f(x) \leq x^n$
pour tout entier naturel n, les fonctions $x \to x^n f(x)$ et $x \to x^n$ sont continues sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 x^n\ f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}\,x$

soit $u_n \leq \left[\dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right]_0^1$ soit $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, u_n étant compris entre 0 et une suite tendant vers 0, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 3

1. $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ donc I a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ donc J a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$
K est le milieu de [IJ] donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, K et G ne sont pas alignés.

3. *a*) $\mathrm{AI}^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{AJ}^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc AI = AJ, A appartient au plan médiateur du segment [IJ].

K est le milieu de [IJ] donc KI = KJ donc K appartient au plan médiateur du segment [IJ].

$\mathrm{GI}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $\mathrm{GJ}^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{3}{2}$ donc GI = GJ, G appartient au plan médiateur du segment [IJ].
A, K, G ne sont pas alignés donc définissent un plan donc le plan médiateur de [IJ] est le plan (AKG)

b) (IJ) est orthogonale en K au plan (AKG). $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ le plan (AKG) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{KM}} = 0$ donc $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{4}\right) = 0$ soit une équation cartésienne du plan (AKG) est $x - z = 0$

c) D a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0) donc ses coordonnées vérifient $x - z = 0$ donc point D appartient au plan (AKG).

4. *a*) $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ donc L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$

Le milieu de [AL] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ donc le point K est le milieu du segment [AL].

b) L est le centre du carré DCGH donc est le milieu de [DG] donc le barycentre de {(D ; 1) (G ; 1)}
Soit M le barycentre de {(A ; 2) (D ; 1) (G ; 1)}, d'après l'associativité du barycentre, M est le barycentre de {(A ; 2) (L ; 2)}
K est le milieu du segment [AL] donc le barycentre de {(A ; 2) (L ; 2)} donc M = K
Donc K est le barycentre de {(A ; 2) (D ; 1) (G ; 1)}.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)
Partie A Étude d'un cas particulier

1. *a*. $\dfrac{-a}{b-a} = \dfrac{-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\,(1+\sqrt{3})-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})} = \dfrac{-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$

or $\mathrm{i}\,(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ donc $\dfrac{-a}{b-a} = \mathrm{i}$

b. $\dfrac{-a}{b-a} = \mathrm{i}$ donc $\left|\dfrac{-a}{b-a}\right| = 1$ donc $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}} = 1$ soit OA = AB donc OAB est un triangle isocèle en A.

$\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right) = \arg \mathrm{i}$ donc $\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AO}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z$ donc $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} a = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) a$

soit $c = \left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$

$c = -\dfrac{1}{2}\times(1+3) = -2$

3. *a*. Le point A a pour coordonnées $(1\,;\,\sqrt{3})$ et C (– 2 ; 0)

Le coefficient directeur de la droite (AC) est $\dfrac{y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{C}}} = \dfrac{\sqrt{3}-0}{1-(-2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

La droite (AC) a une équation de la forme $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b$

C appartient à (AC) donc $0 = -2\dfrac{\sqrt{3}}{3} + b$ soit $b = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

La droite (AC) a pour équation : $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ soit $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

b. D est le point d'affixe $d = -2-2\,\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\,\mathrm{i}$.

Le milieu de [BD] est le point d'affixe $\dfrac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})\,\mathrm{i}}{2}$

Le milieu N de [BD] est le point de coordonnées $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_{\mathrm{N}}+2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+2\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = y_{\mathrm{N}}$ donc le milieu N du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B Étude du cas général

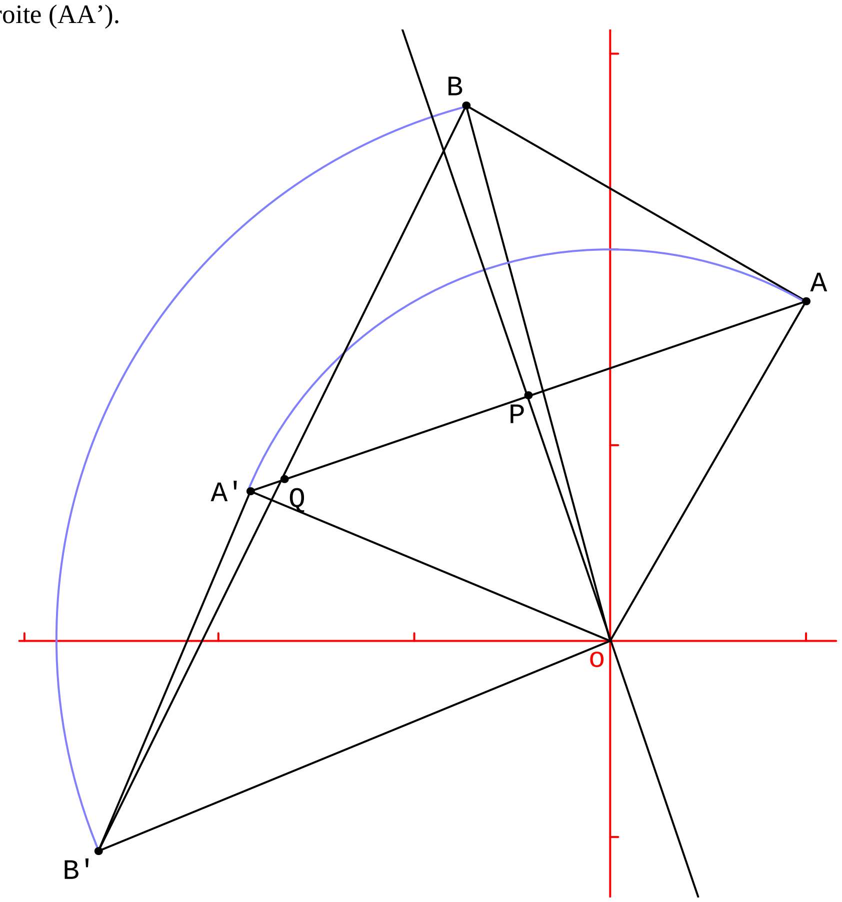
1. La rotation de centre O et d'angle θ a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ donc $a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} a = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,a$ et $b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} b = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,b$.

2. *a*. $p = \dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{A'}}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}a$ et $q = \dfrac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{B'}}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}b$

b. $\dfrac{-p}{q-p}=\dfrac{-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a}{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}b-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a}=\dfrac{-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a}{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}(b-a)}=\dfrac{-a}{b-a}$

c. $\dfrac{-p}{q-p}=\dfrac{-a}{b-a}$ or $\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ donc $\arg\left(\dfrac{-p}{q-p}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ donc $(\overrightarrow{PQ}\,;\overrightarrow{PO})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d. A' image du point A par la rotation *r* donc le triangle OAA' est isocèle en O.
P milieu de [AA'] donc la droite (OP) est la médiatrice du segment [AA'] donc la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AA').
La droite (OP) est aussi perpendiculaire à la droite (PQ) ((question précédente) donc les droites (AA') et (PQ) sont soit strictement parallèles, soit confondues.
P est le milieu de [AA'] donc appartient à (AA'), alors les droites (AA') et (PQ) ont un point commun P donc sont confondues et donc le point Q appartient à la droite (AA').



Exercice 4 (5 points) (enseignement de spécialité)

1. *a.* $2\times 23=46$ donc $-2\times 23+47\times 1=1$ donc $(-2\,;1)$ est une solution particulière de (E).

b. $23x+47y=1$
$-2\times 23+47\times 1=1$ donc par différence membre à membre : $23(x+2)+47(y-1)=0$ soit $23(x+2)=-47(y-1)$
47 divise $23(x+2)$ or 23 et 47 sont premiers entre eux donc 47 divise $x+2$(théorème de Gauss)
Il existe un entier relatif k tel que $x+2=47k$
En remplaçant dans $23(x+2)=-47(y-1)$, $x+2$ par $47k$ on obtient que $y-1=-23k$
Si $(x\,;y)$ est solution de (E), il existe un entier relatif k tel que $y=-23k+1$ et $x=47k-2$
<u>Vérification :</u>
Si $x=47k-2$ et $y=-23k+1$: $23x+47y=23(47k-2)+47(-23k+1)=23\times 47k-2\times 23-47\times 23k+47$
$23x+47y=1$ donc $(47k-2\,;-23k+1)$ est solution de (E)
L'ensemble des solutions de (E) sont les couples $(-47k-2\,;-23k+1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

c. Si x est solution de $23x\equiv 1\ (47)$, il existe un entier relatif y tel que $23x=47y+1$ soit $23x-47y=1$
soit $23x+47\times(-y)=1$. D'après la question précédente, $x=47k-2$ et $-y=-23k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$
$x\in$ A donc $1\le 47k-2\le 46$
$3\le 47k\le 48\Leftrightarrow \dfrac{3}{47}\le k\le\dfrac{48}{47}\Leftrightarrow k=1\Leftrightarrow x=45$ donc 45 est l'unique entier x appartenant à A tel que $23x\equiv 1\ (47)$.

2. *a*. Si $a\,b \equiv 0$ (47) alors 47 divise $a\,b$
or 47 est un nombre premier donc soit 47 divise a soit 47 divise b donc $a \equiv 0$ (47) ou $b \equiv 0$ (47).

b. $a^2 \equiv 1$ (47) $\Leftrightarrow a^2 - 1 \equiv 0$ (47) $\Leftrightarrow (a - 1)(a + 1) \equiv 0$ (47)
alors d'après la question précédente : $a - 1\equiv 0$ (47) ou $a + 1 \equiv 0$ (47) c'est-à-dire $a \equiv 1$ (47) ou $a \equiv - 1$ (47).

3. *a*.

petit théorème de Fermat : Soit a un entier relatif et p un nombre premier. Si p ne divise pas a alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

$1 \leq p \leq 46$ donc 47 ne divise pas p
47 est un nombre premier, 47 ne divise pas p donc d'après le petit théorème de Fermat : $p^{46} \equiv 1$ [47] soit $p \times p^{45} \equiv 1$ [47]
pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q ($q = p^{45}$) tel que $p \times q \equiv 1$ (47) .

b. Soit p un entier de A tel que $p = inv(p)$
Par définition $p \times inv(p) \equiv 1(47)$ or $p = inv(p)$ donc $p \times p \equiv 1(47)$ soit $p^2 \equiv 1$ (47) donc $p \equiv 1(47)$ ou $p \equiv - 1(47)$ d'après 2. *b*.
$p \equiv 1(47) \Leftrightarrow p = 1 + 47\,k$ ($k \in \mathbb{Z}$) or $p \in [1 , 46]$ donc $0 \leq 47\,k \leq 45$ soit $k = 0$ donc $p = 1$

$p \equiv - 1(47) \Leftrightarrow p = - 1 + 47\,k$ ($k \in \mathbb{Z}$) or $p \in [1 , 46]$ donc $2 \leq 47\,k \leq 47$ soit $k = 1$ donc $p = 46$

<u>Sans idées mais avec du courage :</u>
$inv(1) = 1$
$46 \equiv - 1$ (47) donc $46 \times 46 \equiv 1$ (47) soit $inv(46) = 46$
$4 \times 12 = 48$ donc $inv(4) = 12$ et $inv(12) = 4$
$5 \times 19 = 95 = 2 \times 47 + 1$ donc $inv(5) = 19$ et $inv(19) = 5$
$6 \times 8 = 48$ donc $inv(6) = 8$ et $inv(8) = 6$
$7 \times 27 = 149 = 47 \times 47 + 1$ donc $inv(7) = 27$ et $inv(27) = 7$
$9 \times 21 = 189 = 47 \times 47 + 1$ donc $inv(9) = 21$ et $inv(21) = 9$
$10 \times 33 = 330 = 47 \times 47 + 1$ donc $inv(10) = 33$ et $inv(33) = 10$
$11 \times 30 = 330 = 47 \times 47 + 1$ donc $inv(11) = 30$ et $inv(30) = 11$
$13 \times 29 = 377 = 8 \times 47 + 1$ donc $inv(13) = 29$ et $inv(29) = 13$

$14 \times 37 = 518 = 11 \times 47 + 1$ donc $inv(14) = 37$ et $inv(37) =14$
$15 \times 22 = 330 = 7 \times 47 + 1$ donc $inv(15) = 22$ et $inv(22) = 15$
$17 \times 36 = 612 = 13 \times 47 + 1$ donc $inv(17) = 36$ et $inv(36) = 17$
$18 \times 34 = 612 = 13 \times 47 + 1$ donc $inv(18) = 34$ et $inv(34) = 18$
$20 \times 40 = 800 = 17 \times 47 + 1$ donc $inv(20) = 40$ et $inv(40) = 20$
$23 \times 45 = 1035= 22 \times 47 + 1$ donc $inv(23) = 45$ et $inv(45) = 23$
$25 \times 32 = 800 = 17 \times 47 + 1$ donc $inv(25) = 32$ et $inv(32) = 25$
$26 \times 38 = 988 = 21 \times 47 + 1$ donc $inv(26) = 38$ et $inv(38) = 26$
$28 \times 42 = 1176 = 25 \times 47 + 1$ donc $inv(28) = 42$ et $inv(42) = 28$
$31 \times 44 = 1364 = 29 \times 47 + 1$ donc $inv(31) = 44$ et $inv(44) = 31$
$35 \times 43 = 1505 = 32 \times 47 + 1$ donc $inv(35) = 43$ et $inv(43) = 35$
$39 \times 41 = 1599= 34 \times 47 + 1$ donc $inv(39) = 41$ et $inv(41) = 39$

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$inv(p)$	1	24	16	12	19	8	27	6	21	33	30	4	29	37	22	3	36	34	5	40	9	15	45

p	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
$inv(p)$	2	32	38	7	42	13	11	44	25	10	18	43	17	14	26	41	20	39	28	35	31	23	46

Seuls 1 et 46 vérifient $p \in$ A et $p = inv(p)$

c. $46\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times 45 \times 46$
$46\,! = (2 \times 24) \times (3 \times 16) \times (4 \times 12) \times (5 \times 19) \times (6 \times 8) \times (7 \times 27) \times (9 \times 21) \times (11 \times 30) \times (13 \times 29) \times (14 \times 37) \times (14 \times 37) \times$
$(15 \times 22) \times (17 \times 36) \times (18 \times 34) \times (23 \times 45) \times (25 \times 32) \times (26 \times 38) \times (28 \times 42) \times (31 \times 44) \times (35 \times 43) \times (39 \times 41) \times 46$
Tous les produits entre parenthèses sont de la forme $p \times inv(p)$ donc congrus à 1 modulo 47
$46\,! \equiv 46$ (47) donc $46\,! \equiv - 1$ (47).