Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On prélève n boules successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants :
A :" On obtient des boules des deux couleurs";
B :" On obtient au plus une boule blanche ".

1 : *a* : Calculez la probabilités de l'événement : "Toutes les boules tirées sont de même couleur "
b : Calculez la probabilités de l'événement : "On obtient exactement une boule blanche".
c : Déduisez-en que les probabilités p(A et B) , p(A) et p(B) sont :

$$p(\text{A et B}) = \frac{n}{2^n} \ ; \ p(\text{B}) = \frac{n+1}{2^n} \ ; \quad p(\text{A}) = 1 - \frac{1}{2^{(n-1)}}.$$

2 : Montrez que $p(\text{A et B}) = p(\text{A}) \times p(\text{B})$ si et seulement si $2^{(n-1)} = n + 1$.
3 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par : $u_n = 2^{(n-1)} - (n + 1)$
a : Calculez les trois premiers termes de cette suite.
b : Démontrez que cette suite est strictement décroissante.
4 : Déduisez-en la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants

CORRECTION

Il y a 10 boules dans l'urne ; on effectue n tirages avec remise successivement donc l'univers Ω ; ensemble de tous les tirages possibles a pour cardinal 10^n.
Pour un événement quelconque A de l'univers ; comme il y a équiprobabilité des tirages ;
la probabilité de A est : $p(\text{A}) = \dfrac{\text{card (A)}}{\text{card }(\Omega)}$.

1 : Il y a 5 boules noires ; donc ; il y a 5^n façons de tirer n boules noires.
Même chose pour les boules blanches. Il y a donc 2×5^n façons de tirer toutes les boules de la même couleur.

La probabilité demandée est donc : $\dfrac{2\times 5^n}{10^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

La probabilité de tirer en premier une boule blanche ; puis $(n - 1)$ boules noires est : $\dfrac{1}{2^n}$.

Mais c'est la même probabilité que de tirer en seconde position une boule blanche et le reste que des boules noires ; ou de tirer à la k-ème place une boule blanche et le reste que des boules noires. Comme il y a n façons de choisir "l'emplacement" de la boule blanche ; on en déduit que la probabilité demandée est : $\dfrac{n}{2^n}$.

On peut aussi utiliser une loi binomiale : On appelle X le nombre de boules blanches obtenues après n tirages.
Pour chaque tirages ; la probabilité d'obtenir une boule blanche est $p = 0{,}5$. Les tirages sont indépendants.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$; $p = 0{,}5$.

Pour tout k entier ; $p(\text{X} = k) = C_5^k\, p^5 (1 - p)^{5-k}$ où $C_5^k = \dfrac{5!}{k!(5-k)!}$.

Pour k =1 ; on a la réponse.

L'événement (A et B) correspond à " On obtient exactement une blanche" ; donc ; d'après la question *b*) ; on a bien $p(\text{A et B}) = \dfrac{n}{2^n}$.

A est l'événement contraire de " On obtient des boules toutes de même couleur" ; donc ; d'après *a*) ;
on a : $p(\text{A}) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

B est la réunion disjointe des événements "On obtient que des boules noires" et " On obtient exactement une boule blanche" ; donc :
$p(\text{B}) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^n}$

2 : La réponse résulte directement de la réponse de la question précédente. Simple calcul.

3 : Les trois premiers termes de cette suite sont : – 1 ; 0,3.

4 : Pour n entier supérieur à 2 ; on a : $u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1$ qui est bien strictement positif .
La suite est donc strictement croissante. Comme $u_3 = 0$; la seule valeur qui annule la suite est $n = 3$.
Donc les événements A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.