On appelle rep-units les nombres entiers de la forme 11, 111, 1111... On pose $R_2 = 11$, $R_3 = 111$ (...)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2

1. Justifier que, quel que soit $n \geq 2$, $10^n - 1$ est divisible par 9
2. Comparer R_n à $10^n - 1$
3. En utilisant 2., démontrer que si n est pair et supérieur ou égal à 4, alors R_n n'est pas premier
4. En justifiant brièvement, citer 2 nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit.
5. A quelle condition sur n le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit R_n ?

6 En écrivant R_n à l'aide de puissances de 10, écrire $9 R_n$ comme une différence pour tout entier n ($n > 1$)

7. *a*. Déterminer les restes de la division euclidienne de 10^k par 7 pour k entier et $1 < k < 8$

b. Soit n un entier strictement positif. Démontrer que : " $10^n - 1$ congru à 0 [7] " équivaut à " n est multiple de 6 "
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que R_n soit un multiple de 7

CORRECTION

1. quel que soit $n \geq 2$, $1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1} = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$ donc $10^n - 1 = 9\,(1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1})$

$1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1} \in \mathbb{N}$ donc $10^n - 1$ est divisible par 9.

2. Pour tout entier n ($n \geq 2$) $R_n = 1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1} = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

3. si n est pair et supérieur ou égal à 4, $n = 2k$ avec k entier supérieur ou égal à 2 donc $10^n - 1 = 10^{2k} - 1 = (10^k - 1)(10^k + 1)$

$10 \equiv 1$ [9] donc $10^k - 1 \equiv 0$ [9]
il existe un entier q tel que $10^k - 1 = 9q$ et $q \neq 1$ donc $R_n = (10^k + 1)\,q$
$q \neq 1$ donc R_n admet deux diviseurs $10^k + 1$ et q avec $10^k + 1 \neq 1$ donc $q \neq R_n$ et $q \neq 1$ donc $10^k + 1 \neq R_n$
$10^k + 1$ est un diviseur positif de R_n différent de 1 et de R_n donc R_n n'est pas premier.

4. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2 ; 3 ; 5 ; 7

10 est un nombre pair donc $1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1}$ est un nombre impair. 2 ne divise pas R_n.

5 divise 10 donc si $n \geq 2$, 5 divise $10 + 10^2 + 10^{n-1}$ donc il existe un entier q tel que $10 + 10^2 + 10^{n-1} = 5q$
donc $(1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1}) - 5q = 1$ donc d'après le théorème de Bézout 5 et $1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1}$ sont premiers entre eux
5 ne divise pas $1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1}$ donc 5 ne divise pas R_n.

5. R_n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 donc si et seulement si n est divisible par 3.

6 Pour tout entier n ($n > 1$) $R_n = 1 + 10 + 10^2 + 10^{n-1} = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$ donc $9 R_n = 10^n - 1$

7. *a*. $10 \equiv 3$ [7] donc $10^2 \equiv 9$ [7] soit $10^2 \equiv 2$ [7] donc $10^3 \equiv 6$ [7]

$10^4 \equiv 18$ [7] donc $10^4 \equiv 4$ [7]
$10^5 \equiv 12$ [7] donc $10^5 \equiv 5$ [7] et $10^6 \equiv 1$ [7]
$10^7 \equiv 3$ [7]

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	1	3	2	6	4	5	1	3	2

b. Soit n un entier strictement positif, dans la division euclidienne de n par 6, il existe deux entiers q et r tels que $n = 6q + r$ avec $0 \leq r \leq 5$
donc $10^n \equiv (10^6)^k \times 10^r$ [7] or $10^6 \equiv 1$ [7] donc $10^n \equiv 10^r$ [7]
or si $0 \leq r \leq 5$, $10^r \equiv 1$ [7] $\Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow n$ est multiple de 6

$9 R_n = 10^n - 1$,
$10^n - 1 \equiv 0$ [7] $\Leftrightarrow$ 7 divise $9 R_n$ or 7 est premier avec 9 donc 7 divise $9 R_n \Leftrightarrow$ 7 divise R_n soit $10^n - 1 \equiv 0$ [7] $\Leftrightarrow R_n \equiv 0$ [7]
$R_n \equiv 0$ [7] $\Leftrightarrow n$ est multiple de 6.