On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 1 + 2^{2^n}$.

1. Calculer T_k pour k compris entre 0 et 4.
2. Avec combien de chiffres s'écrit T_9 ?
3. Donner l'écriture de T_9 en base 2.
4. Quel est le chiffre des unités de T_k dans son écriture en base 10 ?
5. Justifier ces congruences-là : $2^4 \equiv -5^4$ [641] et $5 \times 2^7 \equiv -1$ [641]
6. En déduire que $T_5 = 1 + 2^{32}$ est divisible par 641.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $1 + (T_n - 1)^{2^k} = T_{n+k}$.
8. Montrer que $T_{n+k} \equiv 2$ [T_n].
9. En déduire qu'il existe un entier q tel que $T_{n+k} = 2 + q\,T_n$
10. Soient m et n deux entiers naturels distincts. Montrer que T_n et T_m sont premiers entre eux.
11. Les nombres T_n sont-ils tous premiers ?

CORRECTION

1. $T_0 = 1 + 2^{2^0} = 1 + 2 = 3$. $T_1 = 1 + 2^{2^1} = 1 + 2^2 = 5$ $T_2 = 1 + 2^{2^2} = 1 + 2^4 = 17$

$T_3 = 1 + 2^{2^3} = 1 + 2^8 = 257$ $T_4 = 1 + 2^{2^4} = 1 + 2^{16} = 65\,537$

2. $T_9 = 1 + 2^{2^9}$

$2^9 = 512$ donc $2^{2^9} = 2^{512}$ et $10^{54} \le 2^{512} \le 2 \times 10^{54}$ donc $10^{54} + 1 \le T_9 \le 2 \times 10^{54} + 1 < 10^{55}$

T_9 est un nombre s'écrivant avec 55 chiffres.

3. En base 2, 2^{512} s'écrit 1suivi de 512 zéros donc T_9 s'écrit en base 2 : $\overline{1\underbrace{0...0}_{511 \text{ zéros}}1}$.

4. Le chiffre des unités de T_0 est 3, celui de T_1 est 5, le chiffre des unités de T_2 et celui de T_3 est 7.

Soit $k \ge 2$, $T_k = 1 + 2^{2^k}$, montrons que pour tout $k \ge 2$, $T_k \equiv 7$ [10] pour cela montrons que pour tout $k \ge 2$, $2^{2^k} \equiv 6$ [10]

Initialisation : $2^{2^2} = 16$ donc $2^{2^2} \equiv 6$ [10], la propriété est vérifiée pour $k = 2$

Hérédité : montrons que pour tout $k \ge 2$, si $2^{2^k} \equiv 6$ [10] alors $2^{2^{k+1}} \equiv 6$ [10]

$2^{2^{k+1}} = 2^{2^k \times 2} = 2^{2^k + 2^k} = 2^{2^k} \times 2^{2^k}$ or $2^{2^k} \equiv 6$ [10] donc $2^{2^{k+1}} \equiv 6 \times 6$ [10] soit $2^{2^{k+1}} \equiv 36$ [10] donc $2^{2^{k+1}} \equiv 6$ [10]

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout $k \ge 2$, $2^{2^k} \equiv 6$ [10]

Pour tout $k \ge 2$, $2^{2^k} \equiv 6$ [10] donc $1 + 2^{2^k} \equiv 1 + 6$ [10] soit $T_k \equiv 7$ [10]

Pour tout $k \ge 2$, le chiffre des unités de T_k dans son écriture en base 10 est 7.

5. $2^4 = 16$ et $5^4 = 625$ donc $2^4 + 5^4 = 641$ donc $2^4 + 5^4 \equiv 0$ [641] soit $2^4 \equiv -5^4$ [641]

$5 \times 2^7 = 5 \times 128 = 640 = 641 - 1$ donc $5 \times 2^7 \equiv -1$ [641]

6. $5 \times 2^7 \equiv -1$ [641] donc $(5 \times 2^7)^4 \equiv 1$ [641]

$5^4 \times 2^{28} \equiv 1$ [641] or $5^4 \equiv -2^4$ [641] donc $-2^4 \times 2^{28} \equiv 1$ [641] soit $2^{32} \equiv -1$ [641] donc $1 + 2^{32} \equiv 0$ [641]

T_5 est divisible par 641.

7. $T_n - 1 = 2^{2^n}$ donc $(T_n - 1)^{2^k} = (2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^n \times 2^k} = 2^{2^{n+k}}$ donc $1 + (T_n - 1)^{2^k} = 1 + 2^{2^{n+k}} = T_{n+k}$

8. $T_n - 1 \equiv -1$ [T_n] donc $(T_n - 1)^{2^k} \equiv (-1)^{2^k}$ [T_n] soit $(T_n - 1)^{2^k} \equiv 1$ [T_n] donc $1 + (T_n - 1)^{2^k} \equiv 1 + 1$ [T_n]

donc $T_{n+k} \equiv 2$ [T_n].

9. T_n divise $T_{n+k} - 2$ donc il existe un entier q tel que $T_{n+k} - 2 = q\,T_n$ soit tel que $T_{n+k} = 2 + q\,T_n$.

10. Soit m et n deux entiers naturels distincts, on peut supposer $n < m$. Soit $k = m - n$ donc $m = n + k$

$T_m = T_{n+k}$ donc il existe un entier q tel que $T_m = 2 + q\,T_n$.

Soit $d = \text{PGCD}(T_n ; T_m)$, $T_m - q\,T_n = 2$ donc d divise 2 soit $d = 1$ ou $d = 2$.

$T_n = 1 + 2^{2^n}$ donc T_n est impair donc $d \ne 2$ donc $d = 1$, T_n et T_m sont premiers entre eux.

11. $T_5 = 1 + 2^{32}$ est divisible par 641 donc les nombres T_n ne sont pas tous premiers