Exercice 1 **5 points** *Commun à tous les candidats.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + b\,\mathrm{i}$ où a et b sont deux nombre réels.

On note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $z = a - b\,\mathrm{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\left(\bar{z}\right)^n = \overline{z^n}$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

a. Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + \mathrm{i}$; $z_B = -1 + \mathrm{i}$; $z_C = -1 - \mathrm{i}$ et $z_D = 1 - \mathrm{i}$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. *a.* Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.

b. Déterminer l'affixe z_F du point F.

c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

Exercice 2 **3 points** *Commun à tous les candidats.*

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

– à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O;

– les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;

– les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;

– on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\dfrac{1}{5}$.

2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.

3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».

Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'évènement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 3 **5 points** *Enseignement obligatoire*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

– les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;

– le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;

– le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;

– la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. *a.* Calculer la distance du point A au plan (Q).

En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2 ; − 1).
a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

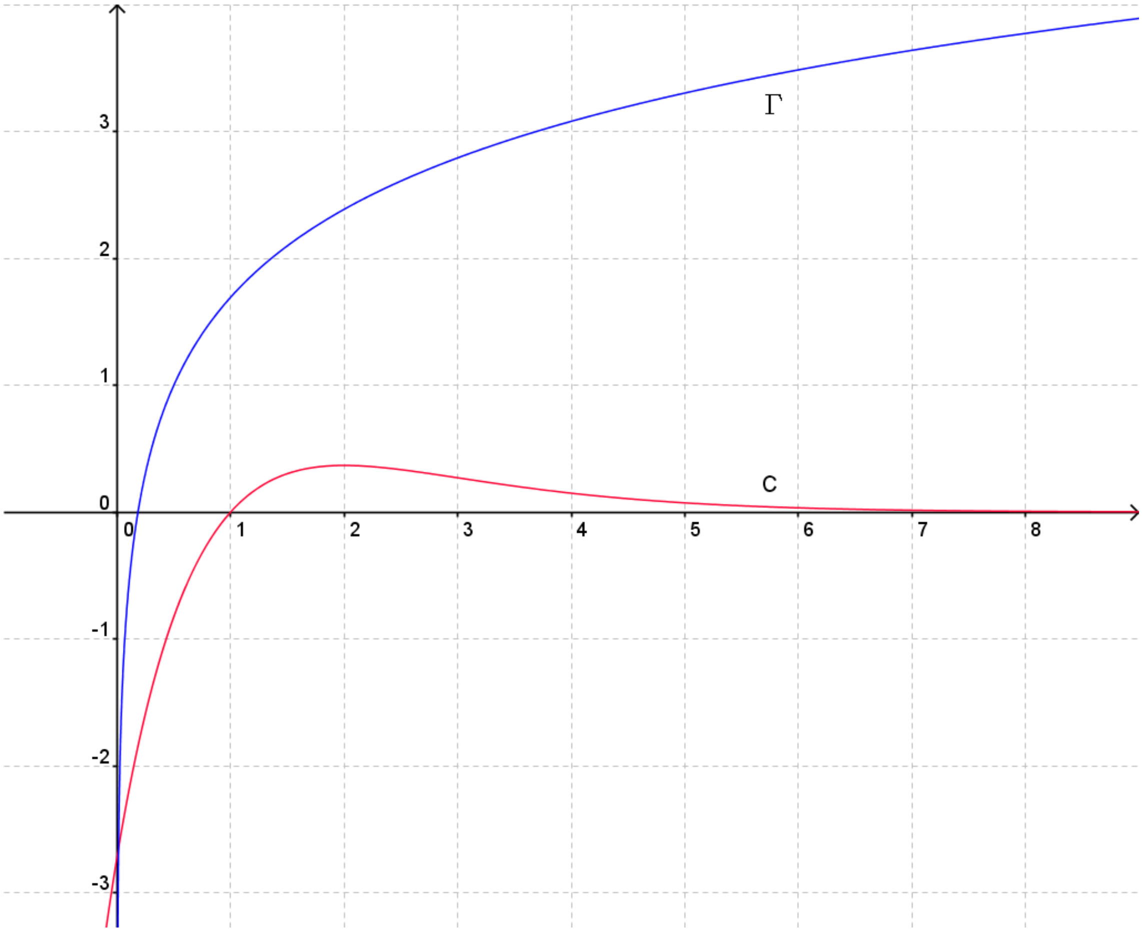
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec ($t \in \mathbb{R}$).

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)
d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
Justifier votre réponse.

Exercice 3 5 points *Enseignement de spécialité*
Les parties A et B sont indépendantes
Partie A
On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.
1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).
Partie B
Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).
1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m > 5$.
a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 32).
b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 5).
d. Pour $m > 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 4 7 points *Commun à tous les candidats.*
L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve
Partie A
1. On considère la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$
a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*
Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α.
b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.
On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.
a. En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.
Partie B
On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = (x - 1)\,e^{1-x}$
On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.
1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\,e^{1-t}\,dt$
a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.
b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1 ; +\infty[$, $F(x) = -x\,e^{1-x} + 1$.
c. Démontrer que sur $[1 ; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.
2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

ANNEXE
Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve
EXERCICE 4



CORRECTION

Exercice 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1. Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ avec a, b, a', b' réels

$\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ et $\overline{z'} = a' - \mathrm{i}\,b'$ donc $\overline{z}\times\overline{z'} = (a - \mathrm{i}\,b)(a' - \mathrm{i}\,b') = a\,a' - \mathrm{i}\,a\,b' - \mathrm{i}\,a'\,b + \mathrm{i}^2\,b\,b'$

$\overline{z}\times\overline{z'} = = a\,a' - b\,b' - \mathrm{i}\,(a\,b' + a'\,b)$

$z\,z' = (a + \mathrm{i}\,b)(a' + \mathrm{i}\,b') = a\,a' + \mathrm{i}\,a\,b' + \mathrm{i}\,a'\,b + \mathrm{i}^2\,b\,b'$

$z\,z' = a\,a' - b\,b' + \mathrm{i}\,(a\,b' + a'\,b)$ or $a\,a' - b\,b'$ et $(a\,b' + a'\,b)$ sont réels donc $\overline{z\times z'} = a\,a' - b\,b' - \mathrm{i}\,(a\,b' + a'\,b)$ donc $\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$

2. Pour tout nombre complexe z, si $n = 1$, $\overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1 = \overline{z^1}$. La propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $\left(\overline{z}\right)^n = \overline{z^n}$ alors $\left(\overline{z}\right)^{n+1} = \overline{z^{n+1}}$

$\left(\overline{z}\right)^{n+1} = \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} = \overline{z^n}\times\overline{z} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^{n+1}}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Partie B

1. si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors $z^4 = -4$ donc $\overline{z^4} = \overline{-4}$ soit $\overline{z}^4 = -4$ donc $\overline{z}$ est aussi solution de l'équation (E).

de même si $z^4 = -4$ alors, comme $(-z)^4 = z^4$ on a aussi $(-z)^4 = -4$ donc $-z$ est aussi solution de l'équation (E).

2. *a.* $|z_0|^2 = 1 + 1$ donc $|z_0| = \sqrt{2}$

$z_0 = \sqrt{2}\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 1 + \mathrm{i}$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ donc $z_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. $z_0^{\,4} = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4^{\,\mathrm{e}\,\mathrm{i}\,\pi}$ donc $z_0^{\,4} = -4$, donc z_0 est solution de (E)

3. $1 + \mathrm{i}$ est solution de (E) donc son opposé $-1 - \mathrm{i}$ aussi et leurs conjugués également donc $1 - \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$ sont solutions de (E), le polynôme $z^4 + 4$ est de degré 4 donc admet 4 racines sur C : $1 + \mathrm{i}$; $1 - \mathrm{i}$; $-1 - \mathrm{i}$; $-1 + \mathrm{i}$.

Partie C

1. r a pour écriture complexe $z' - c = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - c)$ soit $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,z + c - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,c$

en remplaçant : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 1 - \mathrm{i} + \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 1 - \mathrm{i} + \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

2. *a.* $z_E = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + \mathrm{i}) + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_E = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

$z_E = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_E = -1 + \sqrt{3}$.

b. $z_F = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \mathrm{i}) + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_F = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

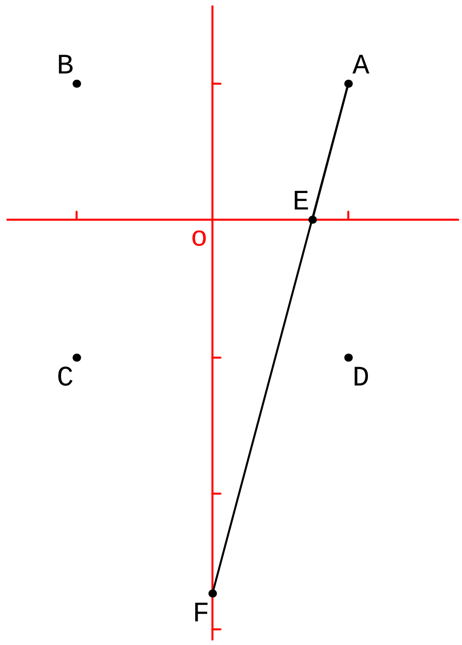
$z_F = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_F = \mathrm{i}\,(-1 - \sqrt{3})$.

c. $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \dfrac{1+\mathrm{i}\ +1-\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}\,(-1-\sqrt{3})} = \dfrac{2-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\,(2+\sqrt{3})} = \dfrac{(2-\sqrt{3}+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i}\,(2+\sqrt{3}))}{(1+\mathrm{i}\,(2+\sqrt{3}))\,(1-\mathrm{i}\,(2+\sqrt{3}))}$

$$\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{2-\sqrt{3}-\mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})+\mathrm{i}+(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2} = \frac{4-\mathrm{i}\,(4-3)+\mathrm{i}}{1+4+4\sqrt{3}+3} = \frac{4}{8+4\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d. $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = 2-\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{AF} = (2-\sqrt{3})\,\overrightarrow{AE}$ donc les points A, E et F sont alignés, $2-\sqrt{3} > 0$ et $E \in [AF]$

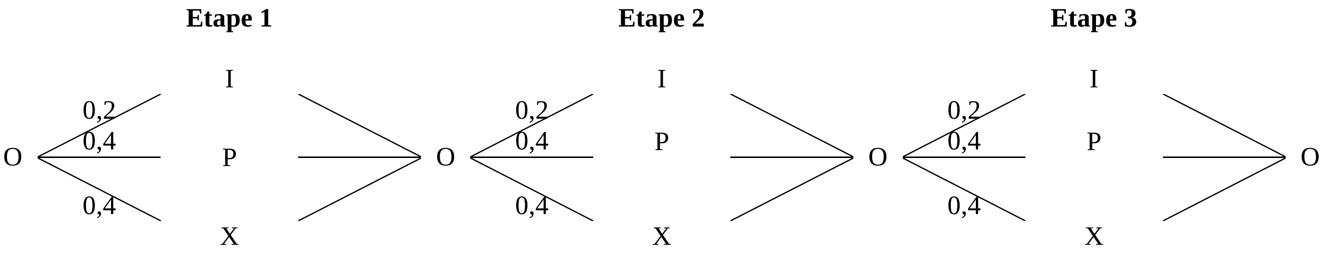


Exercice 2 3 points *Commun à tous les candidats.*

Partie A - Un seul robot

1. A chaque étape, $2\ p(\text{I}) = p(\text{S}) = p(\text{X})$ et $p(\text{I}) + p(\text{S}) + p(\text{X}) = 1$ donc en remplaçant : $p(\text{I}) + 2\ p(\text{I}) + 2\ p(\text{I}) = 1$ soit $5\ p(\text{I}) = 1$ donc $p(\text{I}) = \frac{1}{5}$.

2.



les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres, donc $p\ (\text{S I X}) = p(\text{S}) \times p(\text{I}) \times p(\text{X}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$

3. $p(\text{F}) = p(\text{S I X}) + p(\text{S X I}) + p(\text{I S X}) + p(\text{I X S}) + p(\text{X S I}) + (\text{X I S}) = \frac{4}{125} \times 6 = \frac{24}{125}$

Partie B - Plusieurs robots

On a une succession de n expériences aléatoires indépendantes, l'événement « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » est le contraire de l'événement « « aucun robot ne passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre », la probabilité de cet événement est $\left(1 - \frac{4}{125}\right)^n$

$p = 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n$

$p \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \geq \left(\frac{121}{125}\right)^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln \left(\frac{121}{125}\right)$ or $\ln \left(\frac{121}{125}\right) < 0$

$p \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \left(\frac{121}{125}\right)}$ or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \left(\frac{121}{125}\right)} \approx 141{,}6$ donc $p \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 142$

Exercice 3 5 points *Enseignement obligatoire*

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 1 ; – 1), le plan (P) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal donc *a* une équation de la forme $2x + y - z + d = 0$

le plan (P) passant par le point B donc $2 \times 3 + 2 - 0 + d = 0$ donc $d = -8$

une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 1 ; – 1), donc $AB^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$

la sphère (S) de centre A a pour rayon $\sqrt{6}$, c'est l'ensemble des points M tels que $AM^2 = 6$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$

une équation de la sphère (S) est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0$

3. *a*. le plan (Q) a pour équation : $x - y + 2z + 4 = 0$

donc la distance du point A au plan (P) est égale à $\dfrac{|1-1+2\times1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

La distance du centre de la sphère au plan (Q) est égale au rayon de la sphère donc le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

***b*.** le plan (P) a pour équation : $2x + y - z - 8 = 0$

donc la distance du point A au plan (P) est égale à $\dfrac{|2\times1+1-1-8|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

La distance du centre de la sphère au plan (P) est égale au rayon de la sphère donc le plan (P) est tangent à la sphère (S).

4. *a*. Un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) a pour coordonnées (2 ; 1 ; – 1)

Un vecteur normal $\vec{n'}$ au plan (Q) a pour coordonnées (1 ; – 1 ; 2), ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles, les plans (P) et (Q) sont sécants.

***b*.** Soit la droite (δ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec ($t \in \mathbb{R}$).

le point E de (δ) correspondant au paramètre $t = 0$ a pour coordonnées (0 ; 12 ; 4),

le plan (Q) a pour équation : $x - y + 2z + 4 = 0$, or $0 - 12 + 2 \times 4 + 4 = 0$ donc $E \in (Q)$

le plan (P) a pour équation : $2x + y - z - 8 = 0$ or $2 \times 0 + 12 - 4 - 8 = 0$ donc $E \in (P)$, E est un point de $(P) \cap (Q)$

le point F de (δ) correspondant au paramètre $t = 1$ a pour coordonnées (1 ; 7 ; 1),

le plan (Q) a pour équation : $x - y + 2z + 4 = 0$, or $1 - 7 + 2 \times 1 + 4 = 0$ donc $F \in (Q)$

le plan (P) a pour équation : $2x + y - z - 8 = 0$ or $2 \times 1 + 7 - 1 - 8 = 0$ donc $F \in (P)$, F est un point de $(P) \cap (Q)$

Les plans (P) et (Q) sont sécants donc se coupent suivant la droite (D) = (EF) = (δ)

Une représentation paramétrique de (D) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec ($t \in \mathbb{R}$).

***c*.** A a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1)

A appartient à (D) si et seulement s'il existe un réel *t* tel que $\begin{cases} 1 = t \\ 1 = 12 - 5t \\ 1 = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 5t = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible

Le point A n'appartient pas à la droite (D)

***d*.** L'ensemble des points équidistants des points B et C est tel que $MB^2 = MC^2$

soit $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$ soit $-6x + 9 = 2z + 1 \Leftrightarrow 3x + z - 4 = 0$

Ce plan Π d'équation $3x + z - 4 = 0$, contient les points A, E et F (vérification avec les coordonnées) donc le point A et la droite (D), A n'appartenant pas à (D), ce plan est unique donc Π = (R).

Affirmation vraie

Exercice 3 5 points *Enseignement de spécialité*

Partie A

1. $7 \times 1 - 6 \times 1 = 1$ donc $(1 ; 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. $7x - 6y = 1$ et $7 \times 1 - 6 \times 1 = 1$ donc par différence membre à membre : $7(x-1) - 6(y-1) = 0$ soit $7(x-1) = 6(y-1)$
6 divise $7(x-1)$ or 7 et 6 sont premiers entre eux donc 6 divise $x - 1$(théorème de Gauss)
Il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 6k$
En remplaçant dans $7(x-1) = 6(y-1)$, $x - 1$ par $6k$ on obtient que $y - 1 = 7k$
Si $(x ; y)$ est solution de (E), il existe un entier relatif k tel que $y = 7k + 1$ et $x = 6k + 1$

<u>Vérification :</u>
Si $x = 6k + 1$ et $y = 7k + 1$: $7x - 6y = 7(6k+1) - 6(7k+1) = 7 \times 6k + 7 - 6 \times 7k - 6 = 1$
$7x + 6y = 1$ donc $(6k - 2 ; 7k + 1)$ est solution de (E)
L'ensemble des solutions de (E) sont les couples $(6k + 1 ; 7k + 1)$ avec $k \in$ ↗.

Partie B

1. $0 < m \leq 4$ donc $m \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$
Si $m = 1$, l'équation devient $7^n - 6 = 1$ soit $7^n = 7$ donc $n = 1$
Si $m = 2$, l'équation devient $7^n - 12 = 1$ soit $7^n = 13$ impossible
Si $m = 3$, l'équation devient $7^n - 24 = 1$ soit $7^n = 25$ impossible
Si $m = 4$, l'équation devient $7^n - 48 = 1$ soit $7^n = 49$ donc $n = 2$
Il y a exactement deux couples solutions : $(n ; m) \in \{(1 ; ,1)\ (4 ; 2)\}$

2. *a.* $m > 5$ donc $2^m = 2^5 \times 2^{m-5}$, $m - 5 > 0$ donc $2^{m-5} \in \mathbb{N}$

si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n - 3 \times 2^5 \times 2^{m-5} = 1$
$2^5 = 32$ donc $3 \times 2^5 \times 2^{m-5} \equiv 0 \pmod{32}$ donc $7^n \equiv 1 \pmod{32}$

b. $7^2 = 49 = 32 + 17$ donc $7^2 \equiv 17 \pmod{32}$
$7^2 \equiv 17 \pmod{32}$ donc $7^3 \equiv 7 \times 17 \pmod{32}$ soit $7^3 \equiv 119 \pmod{32}$
$119 = 32 \times 3 + 23$ donc $7^3 \equiv 23 \pmod{32}$
$7^4 \equiv 7 \times 23 \pmod{32}$ or $7 \times 23 = 161 = 32 \times 5 + 1$ donc $7^4 \equiv 1$ (mod (32)

donc pour tout k de $\mathbb{N}$,

$7^{4k} \equiv 1 \pmod{32}$; $7^{4k+1} \equiv 7 \pmod{32}$; $7^{4k+2} \equiv 17 \pmod{32}$; $7^{4k+3} \equiv 23 \pmod{32}$

Soit n un entier naturel, en divisant n apr 4, il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = 4q + r$ avec $0 \leq r \leq 3$
tout entier naturel n est donc de la forme, $4q$; $4q + 1$; $4q + 2$ ou $4q + 3$
donc si $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ alors n est de la forme $4q$
si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ donc n est divisible par 4.

c. si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4, il existe donc un entier k tel que $n = 4k$,
or $7^2 = 49$ donc $7^2 \equiv -1 \pmod 5$ or $7^4 = (7^2)^2$ donc $7^4 \equiv 1 \pmod 5$ donc $7^{4k} \equiv 1 \pmod 5$
si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod 5$.

d. Pour $m > 5$, si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod 5$ alors $1 - 3 \times 2^m \equiv 1 \pmod 5$ soit $3 \times 2^m \equiv 0 \pmod 5$
ce qui voudrait dire que 5 divise 3×2^m or 5 est premier avec 2 et 3 donc avec 3×2^m
Il n'existe pas de couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) si $m > 5$

3. l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) est $\{(1 ; ,1)\ (4 ; 2)\}$

Exercice 4 7 points *Commun à tous les candidats.*

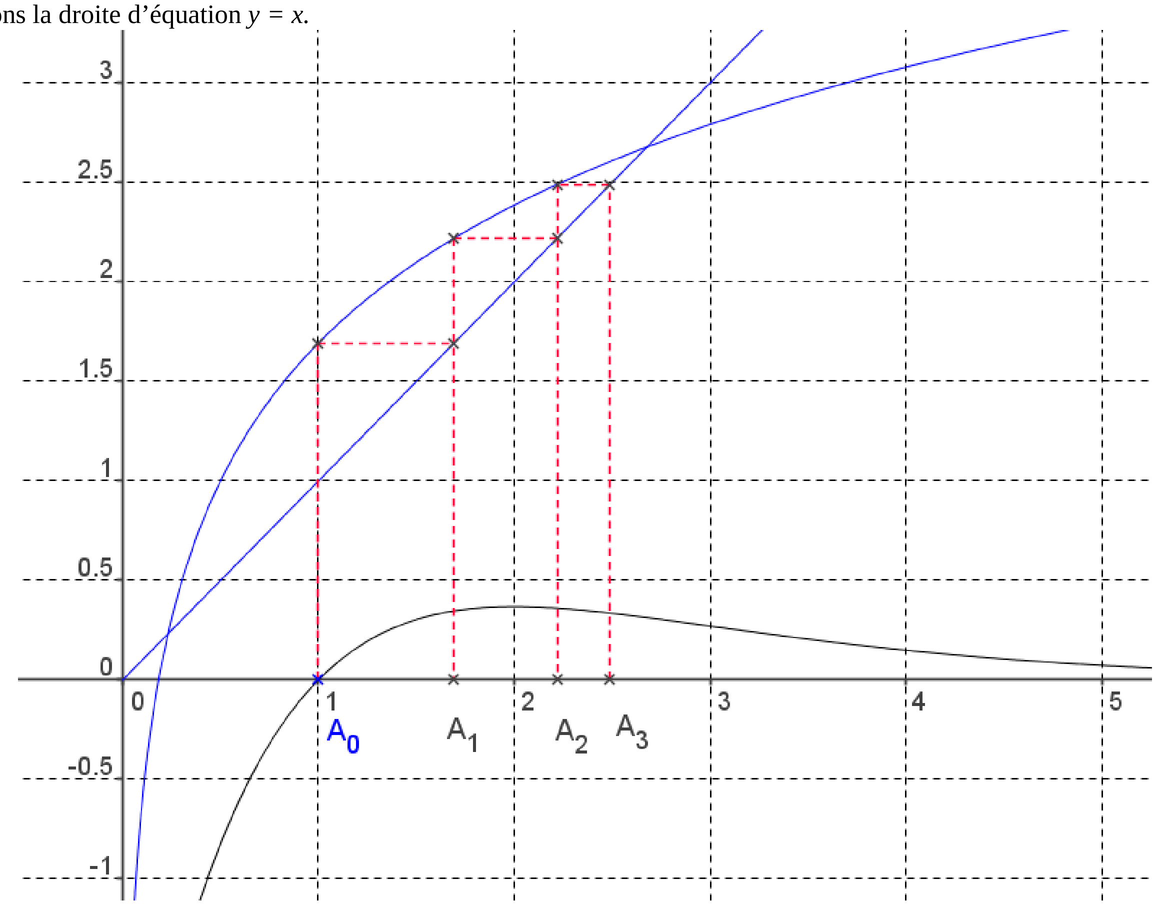
Partie A

1. *a.* g est définie continue (somme de fonctions continues) dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

Si $x > 1$ alors $g'(x) < 0$, et $g'(1) = 0$ donc g est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$
$g(1) = \ln 2 + 1$ donc $g(1) > 0$
$g(x) = \ln 2 + \ln x + 1 - x = \ln 2 + 1 + x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
g est définie continue strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, $0 \in\ ]-\infty ; g(1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α.

b. $g(\alpha) = 0$ donc $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ soit $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. *a.* Traçons la droite d'équation $y = x$.



b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
Si $n = 0$, $u_1 = \ln 2 + 1$ or $0 < \ln 2 < 1$ donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ alors $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction h définie par $h(x) = \ln(2x) + 1$ aussi
$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ donc $h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(3)$
soit $\ln 2 + 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln 6 + 1$
$1 \leq \ln 2 + 1$ et $\ln 6 + 1 \leq 3$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$
La propriété est héréditaire pour tout n donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. la suite (u_n) est croissante majorée par 3 donc converge vers un réel ℓ.
La fonction h est continue sur $[0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = h(u_n)$ donc ℓ vérifie : $h(\ell) = \ell$
L'équation $h(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$ donc la suite (u_n) converge vers α.

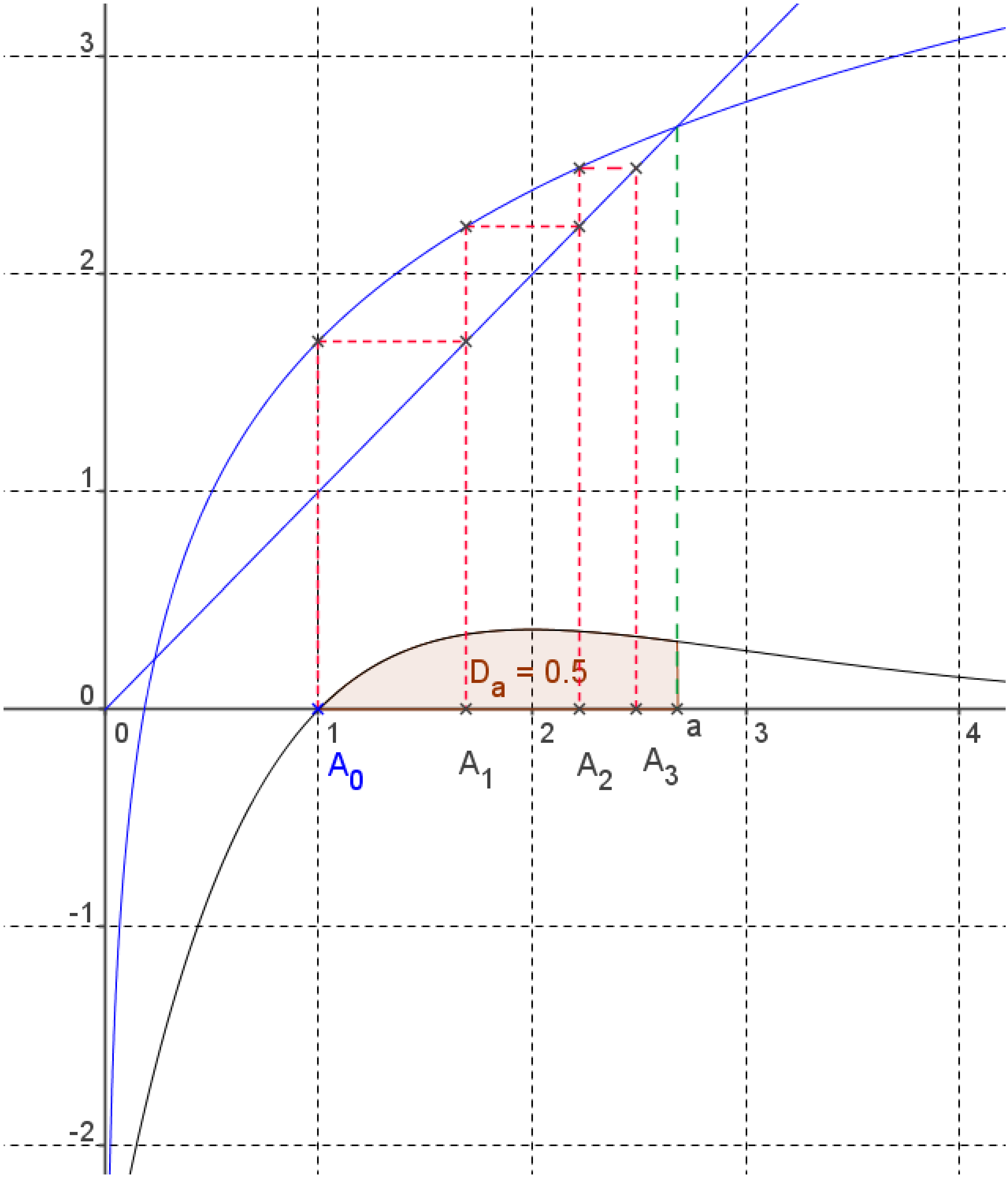
Partie B

1. *a.* $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. La fonction f est continue sur $[1 ; +\infty[$, donc F est la primitive nulle en 1 de f donc $F'(x) = f(x)$
Pour tout x de $]1 + \infty[$, $f(x) > 0$ et $f(1) = 0$ donc la fonction F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. $F(x) = \int_1^x (t-1)\,e^{1-t}\,dt$
Soit $u'(t) = e^{1-t}$ alors $u(t) = -e^{1-t}$
Soit $v(t) = t - 1$ alors $v'(t) = 1$ donc $F(x) = \left[-(t-1)\,e^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -e^{1-t}\,dt$
$F(x) = -(x-1)\,e^{1-x} - \left[e^{1-t}\right]_1^x = -(x-1)\,e^{1-x} - (e^{1-x} - 1)$ donc pour tout réel x appartenant à $[1 ; +\infty[$, $F(x) = -x\,e^{1-x} + 1$.

c. sur $[1 ; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $-x\,e^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\,e^{1-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\,e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln e^{1-x} = 0$
$\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x$.

2. F est une primitive de f, et f est positive sur $[1 ; +\infty[$ donc $D_a = \int_1^a (t-1)\,e^{1-t}\,dt = F(a)$
Résoudre $D_a = \frac{1}{2}$ est équivalent à résoudre $F(a) = \frac{1}{2}$ soit résoudre $\ln(2x) + 1 = x$
a est donc la limite de la suite (u_n) c'est aussi le point d'intersection de la courbe de h et de la droite $y = x$



3
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
a
D_a = 0.5
A_0
A_1
A_2
A_3