Métropole juin 2016

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

PARTIE A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste. Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur.
En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.
On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note : A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est P(S) = 0,89.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

PARTIE B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut. Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A. Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

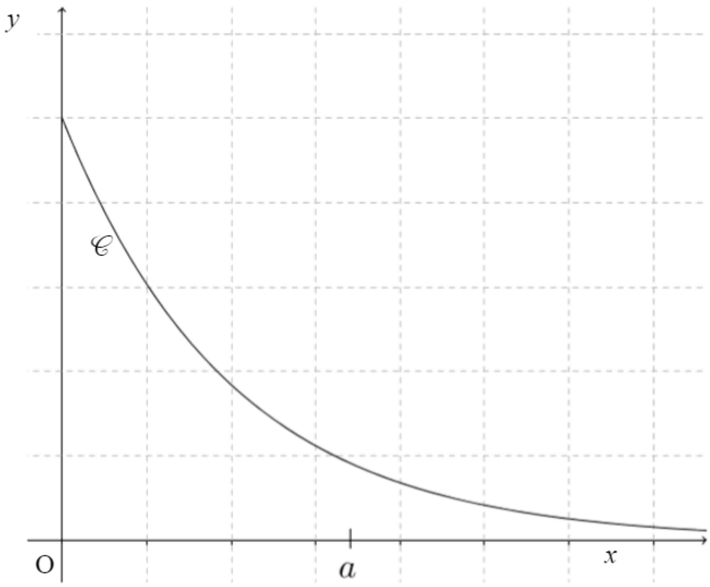
2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

PARTIE C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T.
On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $P(T \leq a) = \int_0^a f(x)\, dx$.

1. La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$

3. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.
Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans. Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance E(T)de la variable aléatoire T à l'unité près. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(– 1, 0, 1), D(2, 1, – 1), E(– 1, – 2, 3) et F(– 2, – 3, 4).

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\,(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd(a, b) le plus grand diviseur commun de a et b.

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b. Existe-t-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs $n\,q$ non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1.$$

Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $n\,y_0 - m\,x_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit $n\,p$.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$

a. On pose $n = q\,r$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que :

$$q\,r\,u - m\,v = 1.$$

b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :              M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que pgcd(M, N) = pgcd(P, Q) = 1
                         X : entier naturel
Entrées :                Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :  Si Q divise N alors
                         | X prend la valeur 0
                         | Tant que (M/N X + P/Q n'est pas entier) et (– M/N X + P/Q n'est pas entier) faire
                         |       X prend la valeur X + 1
                         Fin tant que
                         | Si M/N X + P/Q est entier alors
                         |   | Afficher X, M/N X + P/Q
                         | Sinon
                         |   | Afficher – X, – M/N X + P/Q
                         | Fin Si
                         Sinon
                         | Afficher "Pas de solution"
                         Fin Si
```

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1.$$

b. Que permet-il d'obtenir ?

Exercice 3 (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans R l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
f	$-\infty$	↗			$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que N – ln (N² + 1) < A N prend la valeur N + 1 Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats

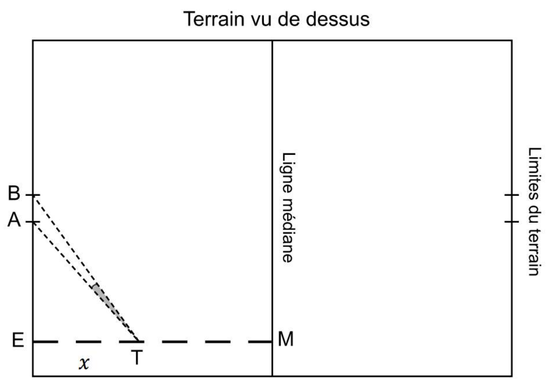
Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui *a* été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible. Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note ET la longueur, qu'on cherche à déterminer.



Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 *m*, EA = 25 *m* et AB = 5,6 *m*.

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

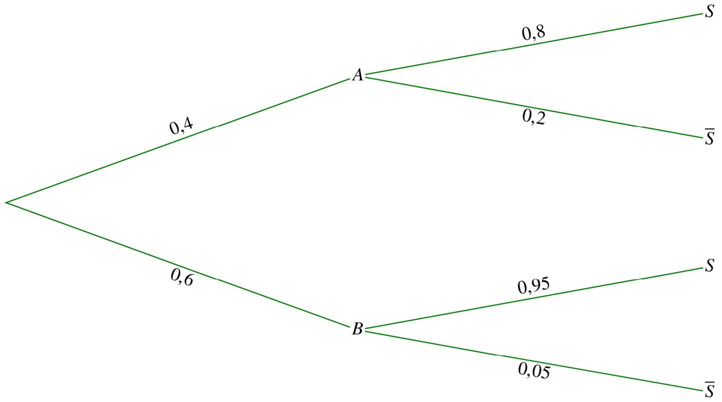
On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6\,x}{x^2 + 765}$.

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0 ; 50] de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$. Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à 0,01 radian près.
Remarque : sur un terrain, un joueur de rugby ne se soucie pas d'*une telle précision.*

CORRECTION

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats
PARTIE A



1. P(S) = P(A ∩ S) + P(B ∩ S) = 0,4 × 0,8 + 0,6 × 0,95 = 0,89.

2. $P_S(A) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(S)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}8}{0{,}87}$ donc $P_S(A) \approx 0{,}36$

PARTIE B
1. $n = 400$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 400 \times 0{,}92 = 3{,}68$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 396{,}32$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$
Les conditions sont réunies pour déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

$\text{I} = \left[\, p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,\right] = \left[\, 0{,}92 - \dfrac{1}{\sqrt{400}} \,;\, 0{,}92 + \dfrac{1}{\sqrt{400}} \,\right]$ donc I = [0,87 ; 0,97].

2. $\text{I} = \left[\, p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,\right]$ donc l'amplitude de cet intervalle $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, elle est au maximum de 0,02 donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ soit $\sqrt{n} \geq \dfrac{2}{0{,}02}$ donc $n \geq 100^2$; la taille minimum de l'échantillon est donc 10 000.

PARTIE C
1. *a.* La fonction f est positive sur $[0 ; +\infty[$ et $a \geq 0$ donc graphiquement $P(T \leq a)$ est l'aire hachurée ci-dessous.

b. Pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ donc une primitive de f est la fonction F définie pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $F(x) = -\, e^{-\lambda x}$ donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\, d\,x = F(a) - F(0) = 1 - e^{-\lambda t}$.
Pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c. $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda\, t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$

3. $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ donc $P(T \leq 7) = 1 - e^{-7\lambda} = 0{,}5$ donc $e^{-7\lambda} = 0{,}5$ soit $-7\lambda = \ln 0{,}5$

$\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}5}{7}$ soit $\lambda \approx 0{,}099$ à 10^{-3} près.

a. $P(T \geq 5) = e^{-5 \times 0{,}099}$ donc $P(T \geq 5) \approx 0{,}61$

b. Une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) = P(T \geq 7 - 2)$
$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) \approx 0{,}61$.

c. $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $E(T) \approx 10$ ans. La durée de vie moyenne du composant est 10 ans.

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Affirmation 1 : FAUSSE

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les trois points A, B, et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : VRAIE

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + (-2) \times 1 + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + (-2) \times 1 + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$
$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : VRAIE

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2+1 \\ -3+2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\,.\,\vec{n} = (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = -2$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants.

B(3, 0, 1), C(– 1, 0, 1), donc leur milieu I a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1).
$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} -2-1 \\ -3-0 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-0 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ces deux vecteurs sont colinéaires donc $I \in (EF)$.

Affirmation 4 : FAUSSE

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\,(1\,;-1\,;-1)$ est une vecteur directeur de (AB).

Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2 \\ z = -t+3 \end{cases}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (CD) est $\begin{cases} x = 3t'-1 \\ y = -t' \\ z = -2t'+1 \end{cases}$.

Le point d'intersection s'il existe a des coordonnées telles que $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2 \\ z = -t+3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3t'-1 \\ y = -t' \\ z = -2t'+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t+1 = 3t'-1 \\ -t+2 = -t' \\ -t+3 = -2t'+1 \end{cases}$

Soit le système $\begin{cases} t+1 = 3t'-1 \\ -t+2 = -t' \end{cases}$ par addition : $2t' - 1 = 3$ donc $t' = 2$, en remplaçant $t = 4$
alors $-t + 3 = -1$ et $-2t' + 1 = -5$ donc la dernière condition $-t + 3 = -2t' + 1$ n'est pas vérifiée, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $15\,x - 12\,y = 3\,(5\,x - 4\,y)$ si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors $5\,x - 4\,y$ est un entier relatif donc l'entier $15\,x - 12\,y$ est divisible par 3.

b. $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{15\,x - 8}{12} \Leftrightarrow 15\,x - 12\,y = 8$,

3 divise $15\,x - 12\,y$ et ne divise pas 8 donc il n'existe pas de point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

Généralisation

2. *a.* $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q} \Leftrightarrow n\,q\,y_0 = q\,m\,x_0 - n\,p \Leftrightarrow q\,(n\,y_0 - m\,x_0) = -\,n\,p$

Le nombre $n\,y_0 - m\,x_0$ est un entier relatif, et $q\,(n\,y_0 - m\,x_0) = -\,n\,p$ donc q divise le produit $n\,p$.

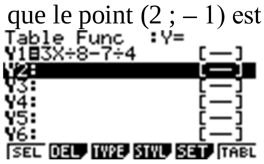
b. pgcd$(p, q) = 1$ donc p et q sont premiers entre eux et q divise le produit $n\,p$ donc d'après le théorème de Gauss, q divise n.

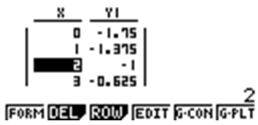
3. *a.* pgcd$(n, m) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $n\,u - m\,v = 1$
$n = q\,r$, donc $q\,r\,u - m\,v = 1$.

b. $q\,r\,u - m\,v = 1$ donc en multipliant par $-\,n\,p$: $-\,n\,p\,(q\,r\,u - m\,v) = -\,n\,p \Leftrightarrow n\,q\,(-\,p\,r\,u) + n\,p\,m\,v = -\,n\,p$

$n\,q\,(-\,p\,r\,u) + q\,m\,(r\,p\,v) = -\,n\,p$, en posant $y_0 = -\,p\,r\,u$ et $x_0 = -\,r\,p\,v$ alors $n\,q\,y_0 = q\,m\,x_0 - n\,p$ soit $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$, donc il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. $p = 7$ et $q = 4$ donc pgcd$(p, q) = 1$
$m = 3$ et $n = 8$ donc pgcd$(n, m) = 1$, de plus 4 divise 8 donc d'après la question précédente, cette droite possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
On pouvait aussi grâce à TABL, vérifier que le point $(2\,;\,-1)$ est un point de Δ.





5. *a.* Si Q ne divise pas N alors on va directement à l'affichage "Pas de solution".
Si Q divise N alors d'après la question **3. *b.*** il existe pour tous les entiers relatifs m, n, p, q m, n, p, q tels que pgcd(m, n) = pgcd$(p, q) = 1$ et Q divise N un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

Il existe alors un entier relatif x_0 tel que $\frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$ est entier.

Cet entier est soit positif, soit négatif.
La boucle Tant que s'arrête si l'une des deux conditions n'est pas vérifiée ce qui, arrivera au moins une fois.

b. Cet algorithme permet de trouver un point de Δ dont les coordonnées sont entières.

Exercice 3 (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. $f\,(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

2. $f\,'(x) = 1 - \frac{2\,x}{x^2 + 1}\,\frac{x^2 - 2\,x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ donc $f\,'(x) > 0$ si $x \neq 1$ et $f\,'(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$ donc par addition $\lim\limits_{x \to -\infty} f\,(x) = -\infty$

3. La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ donc pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f\,(0) \le f\,(x) \le f\,(1)$
soit $0 \le f\,(x) \le 1 - \ln 2$ or $1 - \ln 2 \le 1$ donc $0 \le f\,(x) \le 1$ donc $f\,(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

4. *a.* Cet algorithme détermine le premier entier naturel N tel que $F(N) \ge A$

b. En effectuant un balayage par pas de 10 :

N	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
F(N)	0	5,38	14,01	23,20	32,62	42,18	51,81	61,50	71,24	81,00	90,79	100,60

donc $100 < N \le 110$, en effectuant un balayage de 101 à 110 par pas de 1

N	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
F(N)	91,77	92,75	93,73	94,71	95,69	96,67	97,65	98,64	99,62	100,60

$F(109) < 100$ et $F(110) > 100$ donc $N = 110$

PARTIE B

1. **Initialisation :** $u_0 = 1$ donc u_0 appartient à [0 ; 1]. La propriété est initialisée.
Hérédité : montrons que pour tout n de N, si u_n appartient à [0 ; 1] alors u_{n+1} appartient à [0 ; 1].

$0 \le u_n \le 1$ or f est croissante sur [0 ; 1] donc $f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ soit $0 \le u_{n+1} \le 1 - \ln 2 \le 1$ donc $u_{n+1} \in [0 ; 1]$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, u_n appartient à [0 ; 1].

2. $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ or u_n appartient à [0 ; 1] donc $1 \le u_n^2 + 1$ donc $\ln(u_n^2 + 1) \ge 0$ donc $u_{n+1} - u_n \le 0$
La suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.

4. $\mathbf{l}$ est solution de $f(x) = x$ donc $\mathbf{l} = 0$ d'après la première question de l'exercice.

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats

1. Dans le triangle rectangle ETA $\tan\alpha = \dfrac{\text{EA}}{\text{ET}} = \dfrac{25}{x}$,

Dans le triangle rectangle ETB, $\tan\beta = \dfrac{\text{EB}}{\text{ET}} = \dfrac{25+5,6}{x} = \dfrac{30,6}{x}$,

2. Soit $\begin{cases} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}$ alors $(\tan x)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ donc $(\tan x)' > 0$ donc la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. $\gamma = \beta - \alpha$ donc $\tan\gamma = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{\dfrac{30,6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1 + \dfrac{30,6}{x} \times \dfrac{25}{x}} = \dfrac{30,6 - 25}{x^2 + 30,6 \times 25} = \dfrac{5,6\,x}{x^2 + 765}$.

4. γ est maximal quand $\tan\gamma$ est maximal ou quand $\dfrac{1}{\tan\gamma}$ est minimal soit quand la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 + 765}{5,6\,x}$ admet un minimum. x = ET donc $0 \le x \le 50$, de plus $g(x) = \dfrac{x^2}{5,6\,x} + \dfrac{765}{5,6\,x}$ soit $g(x) = \dfrac{x}{5,6} + \dfrac{765}{5,6\,x}$

Il suffit donc d'étudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 50] par $f(x) = 5,6\,g(x)$ soit $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{765}{x^2}$ soit $f'(x) = \dfrac{x^2 - 765}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{765}$ ou $x = -\sqrt{765}$

x	0		$\sqrt{765}$		50
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f\left(\sqrt{756}\right)$	↗	

Le minimum de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 50] est donc atteint en $\sqrt{756} \approx 27,659$ donc $x \approx 28$ m (au mètre près).

$f(\sqrt{765}) = \sqrt{765} + \dfrac{765}{\sqrt{765}} = 2\sqrt{765}$ donc $g(\sqrt{765}) = \dfrac{2\sqrt{765}}{5,6}$ donc $\tan\gamma = \dfrac{1}{g(\sqrt{765})} = \dfrac{5,6}{2\sqrt{765}} = \dfrac{2,8}{\sqrt{765}}$

$\gamma \approx 0,10$ rad.