1. *a*. Soit x un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

b. Soient a et b deux entiers non nuls tels que $a \neq b$, et n un entier naturel non nul.
Déduire du résultat précédent que $a - b$ divise $a^n - b^n$.

2. *a*. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n.
Montrer que, pour tout entier $a \neq 1$, $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

b. Application : montrer que $2^{2004} - 1$ est divisible par 3, 7 et 63.

CORRECTION

1. *a*. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$.

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x ($x \neq 1$) et de premier terme 1 donc $S_n = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

b. Soit $x = \dfrac{a}{b}$, $a \neq b$ donc $x \neq 1$ donc $x^n - 1 = S_n\,(x - 1)$ d'après la question précédente. En remplaçant x par $\dfrac{a}{b}$ dans cette relation :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{a}{b} + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\right) \times \left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

En réduisant chaque terme au même dénominateur :

$$\frac{a^n - b^n}{b^n} = \frac{b^{n-1} + b^{n-2}\,a + \ldots + b\,a^{n-2} + a^{n-1}}{b^{n-1}} \times \frac{a - b}{b}$$

En multipliant les deux termes de l'égalité par b^n :
$a^n - b^n = (b^{n-1} + b^{n-2}\,a + \ldots + b\,a^{n-2} + a^{n-1})\,(a - b)$
a et b sont des entiers naturels donc $b^{n-1} + b^{n-2}\,a + \ldots + b\,a^{n-2} + a^{n-1}$ est un entier naturel donc $a - b$ divise $a^n - b^n$.

2. *a*. d est un diviseur positif de n donc il existe un entier naturel q tel que $n = d\,q$
Soit $x = a^d$, $a \neq 1$ donc $x \neq 1$, en remplaçant x par a^d dans la relation : $x^q - 1 = S_q\,(x - 1)$ on obtient :

$$(a^d)^q - 1 = (1 + a^d + \ldots + (a^d)^{q-1})\,(a^d - 1)$$

or $(a^d)^q = a^{dq} = a^n$ donc $a^n - 1 = (1 + a^d + \ldots + (a^d)^{q-1})\,(a^d - 1)$
$1 + a^d + \ldots + (a^d)^{q-1}$ est un entier naturel donc pour tout entier n non nul et tout entier $a \neq 1$, $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

b. $2004 = 4 \times 3 \times 167$
2 divise 2004 donc d'après la question précédente, $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^2 - 1$ donc par 3.
3 divise 2004 donc d'après la question précédente, $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^3 - 1$ donc par 7.
12 divise 2004 donc d'après la question précédente, $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^{12} - 1$ donc par 4095.
$4095 = 63 \times 65$ donc 63 divise 4095 donc 63 divise $2^{2004} - 1$