LA REUNION JUIN 2003

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0 ; +\infty[$.

1. *a.* Démontrer que la fonction u définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0 ; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0 ; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

c. **Question de cours**
On sait que la fonction $x \to e^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ (E).
Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur R, de la forme $x \to K\,e^x$, où K est un nombre réel quelconque

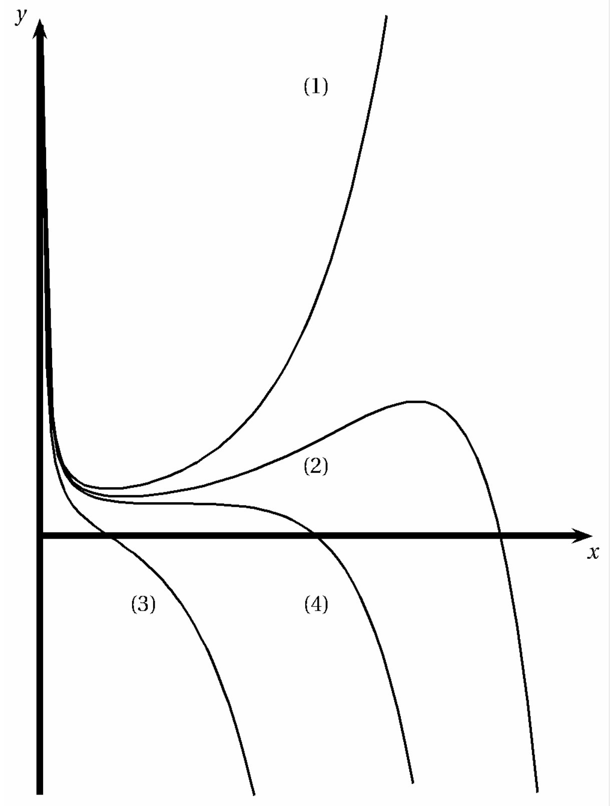
d. En déduire toutes les solutions définies sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \dfrac{k\,x+1}{x} e^x$.

a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.

3. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
On a tracé sur le graphique ci-joint en ANNEXE I les courbes C_{-1}, $C_{-0,25}$, $C_{-0,15}$ et C_0.
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



CORRECTION

1. *a.* Démontrer que la fonction u définie sur $] 0 ; +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

$u'(x) = \dfrac{x\,e^x - e^x}{x^2}$ donc pour tout x de $] 0 ; +\infty[$, $u(x) - u'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

La fonction u définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

1. *b.* Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0 ; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0 ; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

$v - u$ solution de l'équation différentielle $y - y' = 0 \Leftrightarrow (v - u) - (v - u)' = 0 \Leftrightarrow v - u - v' + u' = 0$

$\Leftrightarrow v - v' = u - u'$ or pour tout x de $]0 ; +\infty[$ $u(x) - u'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

$v - u$ solution de l'équation différentielle $y - y' = 0 \Leftrightarrow v - v' = \dfrac{e^x}{x} \Leftrightarrow v$ solution de (E).

1. *d.* En déduire toutes les solutions définies sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation (E).
$v - u$ solution de l'équation différentielle $y - y' = 0 \Leftrightarrow$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $v(x) - u(x) = k\,e^x$ (k réel quelconque)
$\Leftrightarrow$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $v(x) = u(x) + k\,e^x$ (k réel quelconque) $\Leftrightarrow$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $v(x) = \dfrac{kx+1}{x}e^x$.

2. *a.* $f_k(x) = \dfrac{kx+1}{x}e^x = k\,e^x + \dfrac{1}{x}e^x$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{kx+1}{x} = k$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc on a 3 cas :
si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
si $k = 0$, $f_k(x) = \dfrac{e^x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. *b.* Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.
f_k est solution de (E) donc $f'_k(x) = f_k(x) - \dfrac{e^x}{x^2}$ donc $f'_k(x) = \dfrac{kx^2+x-1}{x^2}e^x$.
$f'_k(x)$ a le même signe que $kx^2 + x - 1$
si $k = 0$, $f'_k(x)$ a le même signe que $x - 1$ et $f'_k(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$: $x = 1$.

Si $k \neq 0$:
$\Delta = 1 + 4k$
donc si $k \neq 0$ et $k > -\dfrac{1}{4}$, $kx^2 + x - 1$ s'annule deux fois,
si $k \neq 0$ et $k > -\dfrac{1}{4}$, le produit des racines est $-\dfrac{1}{k}$ et la somme des deux racines est $-\dfrac{1}{k}$.
donc si $k > 0$, les deux racines sont de signes opposés donc $f'_k(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$.
si $-\dfrac{1}{4} < k < 0$, les deux racines sont de même signe et la somme des deux racines est positive donc les deux racines sont positives donc $f'_k(x) = 0$ admet deux solution sur $]0 ; +\infty[$.

si $k = -\dfrac{1}{4}$, $kx^2 + x - 1 = -\dfrac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) = -\dfrac{1}{4}(x-2)^2$ donc $f'_k(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$: $x = 2$.

si $k < -\dfrac{1}{4}$, $kx^2 + x - 1$ ne s'annule pas, $f'_k(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0 ; +\infty[$.

3. si $k = -1$, $k < -\dfrac{1}{4}$, $f'_k(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0 ; +\infty[$ donc la courbe C_{-1} n'admet pas de tangente horizontale donc C_{-1} correspond à (3).

si $k = -0{,}25$, $f'_k(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$: $x = 2$ et $f'_k(x) \leq 0$ donc $C_{-0{,}25}$ correspond à une fonction strictement décroissante avec une tangente horizontale au point d'abscisse 2 donc $C_{-0{,}25}$ correspond à (4)

si $k = -0{,}15$, $-\dfrac{1}{4} < k < 0$, $f'_k(x) = 0$ admet deux solution sur $]0 ; +\infty[$, et la dérivée change de signe donc $C_{-0{,}15}$ correspond à (2)

si $k = 0$, $f'_k(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$: $x = 1$, et la dérivée change de signe donc C_0 correspond à (1)