

### Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives  $a, b, c$ .

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que  $(\vec{u}, \overline{AB}) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$ .

Montrer que  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \quad [2\pi]$ .

### Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère le point A d'affixe  $1 + i$ .

On associe, à tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle, le point M' d'affixe  $z' = \frac{z - 1 - i}{z}$ .

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. a. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B', image du point B d'affixe  $i$ .

b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle, l'affixe  $z'$  du point M' est telle que  $z' \neq 1$ .

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que  $|z'| = 1$ .

3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

## CORRECTION

### Partie I : Restitution organisée de connaissances

$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\vec{u}, \overline{AC}) - (\vec{u}, \overline{AB}) \quad [2\pi]$ .

$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg(c - a) - \arg(b - a) \quad [2\pi]$ .

$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \quad [2\pi]$ .

### Partie II :

1. a. L'affixe du point B', image du point B d'affixe  $i$  est  $b' = \frac{1 - 1 - i}{i} = -1$ .

b.  $z' = \frac{z - 1 - i}{z} = 1 - \frac{1 + i}{z}$ , pour tout  $z \neq 0$ ,  $\frac{1 + i}{z} \neq 0$  donc  $z' \neq 1$ .

Pour tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle, l'affixe  $z'$  du point M' est telle que  $z' \neq 1$ .

2.  $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 - i| = |z| \Leftrightarrow AM = OM \Leftrightarrow M$  décrit la médiatrice de [OA]

3. L'affixe du point M' est un nombre réel  $\Leftrightarrow$  il existe un réel  $k$  tel que  $\frac{z - 1 - i}{z} = k$  avec  $z \neq 0 \Leftrightarrow z - 1 - i = k z$  avec  $z \neq 0 \Leftrightarrow$

$\overline{AM} = k \overline{OM}$  avec  $M \neq O \Leftrightarrow O, A$  et M alignés et  $M \neq O$

L'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel est la droite (OA) privée de O.