$u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$ et $u_1 = 1$

1. *a*. Démontrer que cette suite est majorée par 3.

$u_{n+1} = \dfrac{n(u_n+3)+6}{2(n+1)}$

$u_1 = 1$ donc $u_1 \leq 3$

Montrons que pour tout n de N*, si $0 \leq u_n \leq 3$ alors $u_{n+1} \leq 3$

$u_n \leq 3$ donc $u_n + 3 \leq 6$ donc $n(u_n + 3) + 6 \leq 6n + 6$ soit $n(u_n + 3) + 6 \leq 6(n+1)$

donc $\dfrac{n(u_n+3)+6}{2(n+1)} \leq 3$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de N*.

b. Démontrer sa monotonie.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n = \dfrac{(-n-2)u_n}{2(n+1)} + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$

$u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante.

c. Démontrer sa convergence. Calculer sa limite.

La suite (u_n) est croissante majorée par 3 donc est convergente.

Soit ℓ la limite de (u_n)

$u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} = \dfrac{3}{2}$ donc ℓ vérifie : $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + \dfrac{3}{2}$ donc $\ell = 3$

2. On considère v_n avec $n \in$ N*, définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = n(3 - u_n)$

a. Démontrer que cette suite est géométrique et préciser le premier terme et la raison.

$v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1})$

$3 - u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)} u_n - \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} = -\dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3n}{2(n+1)}$

$v_{n+1} = -\dfrac{n}{2} u_n + 3\dfrac{n}{2} = \dfrac{1}{2} n(3 - u_n)$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ de premier terme $v_1 = 3 - u_1 = 2$

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver la limite de la suite (u_n).

$v_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$

$u_n = 3 - \dfrac{1}{n} v_n$ donc $u_n = 3 - \dfrac{1}{n \times 2^{n-2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

c. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$.

$1 + q + .. + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ si $q \neq 1$

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 2(1 + q + .. + q^{n-1})$ avec $q = \dfrac{1}{2}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 2\,\dfrac{1-0{,}5^n}{1-0{,}5} = 4(1 - 0{,}5^n)$

$-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4(1-0{,}5^n) = 4$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right) = 4$