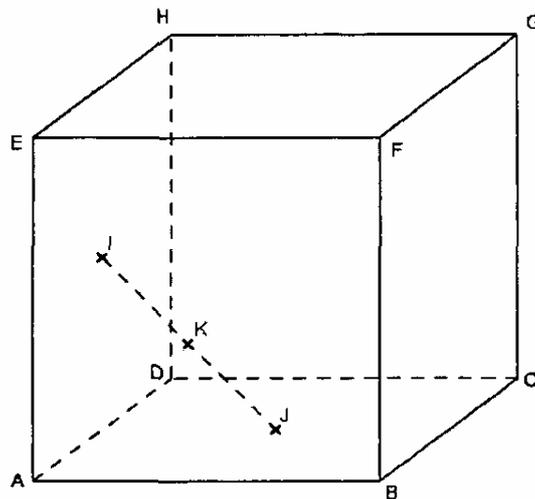


### Amérique du Nord juin 2009

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ]. L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. a) Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).  
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).  
c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G. Soit L le centre du carré DCGH.  
a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].  
b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.



### CORRECTION

1.  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$  donc I a pour coordonnées  $(0; 0,5; 0,5)$ .

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$  donc J a pour coordonnées  $(0,5; 0,5; 0)$ .

K est le milieu de [IJ] donc K a pour coordonnées  $(0,25; 0,5; 0,25)$

2.  $\overrightarrow{AG}$  a pour coordonnées  $(1; 1; 1)$

$\overrightarrow{AK}$  a pour coordonnées  $(0,25; 0,5; 0,25)$  donc il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AK} = k \overrightarrow{AG}$ .

Les points A, K et G ne sont pas alignés.

3. a)  $AI^2 = 0,5^2 + 0,5^2 = 0,5$  et  $AJ^2 = 0,5^2 + 0,5^2 = 0,5$  donc  $AI = AJ$ , A appartient au plan médiateur du segment [IJ].

$KI^2 = 0,25^2 + 0,25^2 = 0,125$  et  $KJ^2 = 0,25^2 + 0,25^2 = 0,125$  donc  $KI = KJ$ , K appartient au plan médiateur du segment [IJ].

$GI^2 = 1^2 + 0,5^2 + 0,5^2 = 1,5$  et  $GJ^2 = 0,5^2 + 0,5^2 + 1^2 = 1,5$  donc  $GI = GJ$ , G appartient au plan médiateur du segment [IJ].  
Les points A, K et G ne sont pas alignés donc le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

b) le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG) donc  $\overrightarrow{IJ} (0,5; 0; -0,5)$  ou encore  $\vec{n} (1; 0; -1)$  est un vecteur normal au plan (AKG) donc une équation de (AKG) est de la forme  $x - z + d = 0$

A appartient à ce plan donc  $d = 0$

Une équation cartésienne du plan (AKG) est  $x - z = 0$

c) D a pour coordonnées  $(0; 1; 0)$  donc  $x_D - z_D = 0$  donc le point D appartient au plan (AKG).

4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G. Soit L le centre du carré DCGH.

a) L a pour coordonnées  $(0,5; 1; 0,5)$  donc  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AL}$  donc le point K est le milieu du segment [AL].

b) K est le barycentre de  $\{(A; 1) (L; 1)\}$

L est le  $\{(D; 1) (G; 1)\}$  soit K' le barycentre de  $\{(A; 2) (D; 1) (G; 1)\}$

K' est le barycentre de  $\{(A; 2) (L; 2)\}$  donc est le milieu du segment [AL] donc  $K' = K$

donc K est le barycentre de  $\{(A; 2) (D; 1) (G; 1)\}$