Soit n un entier naturel non nul. Dans cet exercice, on considère l'équation suivante :

$$\text{(E)}: 3\,x^2 + 7\,y^2 = 10^{2\,n}$$

où x et y sont des entiers naturels. On cherche à déterminer toutes les solutions $(x\,;\,y)$ en entiers naturels de cette équation.

1. Montrer que 100 est congru à 2 modulo 7
2. Montrer qu'un entier a est congru modulo 7 à l'un des entiers suivants: 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.
3. Compléter le tableau suivant:

a	0	1	2	3	4	5	6
$3\,a^2$							

4. Montrer que 2^3 est congru 1 mod 7.
5. Soit r appartenant à { 0 ; 1 ; 2 } le reste dans la division euclidienne de n par 3.

a. Montrer que 2^n est congru à 2^r modulo 7

b. En déduire que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

c. Montrer que (E) est sans solution entière $(x\,;\,y)$.

CORRECTION

1. $100 = 7 \times 14 + 2$ donc $100 \equiv 2$ modulo 7.

2. Dans la division euclidienne de a par 7, il existe un entier q et un entier r tel que $0 \leq r < 7$ et $a = 7\,q + r$ donc $a \equiv r$ modulo 7
a est congru modulo 7 à l'un des entiers suivants: 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

3. Si $a \equiv 0$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 0$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 0$ modulo 7
Si $a \equiv 1$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 0$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 0$ modulo 7
Si $a \equiv 2$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 2^2$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 3 \times 4$ modulo 7 or $12 \equiv 5$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 5$ modulo 7
Si $a \equiv 3$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 0$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 3 \times 4$ modulo 7 or $12 \equiv 5$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 5$ modulo 7

Si $a \equiv 4$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 4^2$ modulo 7 or $16 \equiv 2$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 3 \times 2$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 6$ modulo 7

Si $a \equiv 5$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 5^2$ modulo 7 or $25 \equiv 4$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 3 \times 4$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 5$ modulo 7

Si $a \equiv 6$ modulo 7 alors $a^2 \equiv 36$ modulo 7 or $36 \equiv 1$ modulo 7 donc $3\,a^2 \equiv 3$ modulo 7

a	0	1	2	3	4	5	6
$3\,a^2$	0	3	5	6	6	5	3

4. $2^3 = 8 = 7 + 1$ donc $2^3 \equiv 1$ modulo 7.

5\. *a*. $2^n = 2^{3\,n + r} = (2^3)^n \times 2^r$
$2^3 \equiv 1$ modulo 7 donc $2^{3\,n} \equiv 1$ modulo 7 donc $2^n \equiv 2^r$ modulo 7

b. $r \in \{ 0\,;\,1\,;\,2 \}$ si $r = 0$ alors $2^r \equiv 1$ modulo 7 donc $2^n \equiv 1$ modulo 7
si $r = 1$ alors $2^r \equiv 2$ modulo 7 donc $2^n \equiv 2$ modulo 7
si $r = 2$ alors $2^r \equiv 2^2$ modulo 7 donc $2^n \equiv 4$ modulo 7
2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

c. Si l'équation (E) *a* une solution alors il existe x et y tels que $3\,x^2 + 7\,y^2 = 10^{2\,n}$ donc $3\,x^2 \equiv 10^{2\,n}$ modulo 7
$10^2 \equiv 2$ modulo 7 donc $12^{2\,n} \equiv 2^n$ modulo 7
$3\,x^2$ est congru à 0 ou 3 ou 5 modulo 7.
2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
Il n'existe pas de valeur commune aux deux cas donc l'équation n'a pas de solution entière.