Amérique du sud 2000

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$; $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. *a*. Montrer que (u_n) est majorée par 4.

b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. *a*. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b. Retrouver le résultat du 1. *c*.

c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2(4 - u_n)$

CORRECTION

1. *a*. Montrer que (u_n) est majorée par 4.

$u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 4$ la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire : montrons que pour tout n, si $0 \leq u_n \leq 4$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

$0 \leq u_n \leq 4$ donc $4 \leq 3u_n + 4 \leq 3 \times 4 + 4$ soit $0 \leq 3u_n + 4 \leq 16$ donc $0 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$ donc la propriété est vraie pour $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Il était indispensable de démontrer que $u_n \geq 0$ pour justifier l'existence de $\sqrt{3u_n + 4}$.

b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Par récurrence

$u_0 = 0$ donc $u_1 = 2$ donc $u_0 < u_1$ la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire : montrons que pour tout n, si $u_n < u_{n+1}$ alors $u_{n+2} < u_{n+1}$

$0 < 3u_n + 4 < 3u_{n+1} + 4$ donc $\sqrt{3u_n + 4} < \sqrt{3u_{n+1} + 4}$

soit $u_{n+2} < u_{n+1}$

La propriété est vraie pour $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (u_n) est strictement croissante.

c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(u_n) est strictement croissante majorée par 4 donc (u_n) converge et sa limite ℓ est comprise entre 0 et 4

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

f est définie continue sur [0 ; 4], pour tout n de $\mathbb{N}$, $u\in$ [0 ; 4] et (u_n) converge donc sa limite est solution de $f(x) = x$

si $\sqrt{3x + 4} = x$ alors $x^2 = 3x + 4$ donc $x = -1$ ou $x = 4$ or ℓ est comprise entre 0 et 4 donc $\ell = 4$

2. *a*. $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4}$

$$4 - u_{n+1} = \frac{\left(4 - \sqrt{3u_n + 4}\right)\left(4 + \sqrt{3u_n + 4}\right)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

$0 < u_n < 4$ donc $2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4$

donc $6 < 4 + \sqrt{3u_n + 4} < 8$ donc $\frac{1}{6} > \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} > \frac{1}{8}$

donc $\frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} < \frac{1}{2}(4 - u_n)$

soit $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b. Retrouver le résultat du 1. *c*. **C'est un exercice ancien, à l'heure actuelle on aurait ajouté la question :** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Par récurrence : comme $u_0 = 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ on a : $0 \leq 4 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times 4$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire : montrons que pour tout n, si $0 \leq 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(4 - u_n)$

or $0 \leq 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc en multipliant par $\frac{1}{2}$: $0 \leq \frac{1}{2}\,(4 - u_n) \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

donc $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(4 - u_n) \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

La propriété est vraie pour $n + 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$

$0 \leq 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - u_n = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2\,(4 - u_n)$

$0 \leq 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $0 \leq v_n \leq 4\,n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

or $4\,n^2\,0{,}5^n = 4\,\mathrm{e}^{n \ln 0{,}5 + 2 \ln n} = 4\,\mathrm{e}^{n\left(\ln 0{,}5 + 2\frac{\ln n}{n}\right)}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 0{,}5 + 2\,\frac{\ln n}{n} = \ln 0{,}5$

$\ln 0{,}5 < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\ln 0{,}5 + 2\,\frac{\ln n}{n}\right) = -\infty$

comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n\left(\ln 0{,}5 + 2\frac{\ln n}{n}\right)} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4\,n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.