Guadeloupe – Guyane – Martinique Juin – 99

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère le point A d'affixe 1 et, pour α appartenant à I = [0 ; π[, le point M d'affixe $z = e^{i\alpha}$.

On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1 : A partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les point , A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2 : Déterminer l'ensemble des point P, pour α appartenant à I. Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3 : Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.

4 : Dans le ces où S est différent de 0, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M?

Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{z}$ est réel, quel que soit α appartenant à I.

Conclure sur la conjecture précédente.

CORRECTION

1: Le point P s'obtient, à partir du point M, par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Le point Q s'obtient par la rotation de centre O et d'angle α car l'affixe de Q est $z^2 = z\,e^{i\alpha}$.

On obtient simplement Q à l'aide d'un compas en suivant les étapes suivantes:

- On place M sur le cercle S_1.
- On trace le cercle de centre M et de rayon AM.
- On obtient deux points d'intersection, en général, entre ce cercle et S_1. Le premier point est A. Le second point est le point Q.

Remarquez que, par construction, on ne peut avoir A = Q que si A = M ou A et M diamétralement opposés sur le cercle S_1.

2: On sait que par une translation T de vecteur $\vec{k}$, l'image d'un cercle de centre X et de rayon r est le cercle de centre T(X) et de rayon r.

Par la translation de vecteur $\vec{u}$, l'image de O est A. Donc l'image du cercle de centre O et de rayon $r = 1$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

Comme M parcourt le cercle de centre O et de rayon, on en déduit que l'ensemble des points P est le cercle de centre A et de rayon 1.

3: Pour construire le point S, on suit les étapes suivantes:

- On place M sur le cercle S_1.
- On place le point Q obtenue par la rotation de centre O et d'angle α .(voir la construction précédente)
- On place le point K tel que OMKQ soit un parallélogramme.
- On applique à K la translation de vecteur $\vec{u}$.

Et là, on obtient S.

4: On remarque que le point M est sur la droite (OS). Pour le vérifier, il suffit de montrer que $\dfrac{1+z+z^2}{z}$ est réel.

Or, $\dfrac{1+z+z^2}{z} = \dfrac{1}{z} + 1 + z$, et comme $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, l'inverse de z est son conjugué.

D'où $\dfrac{1}{z} + z = 2\cos\alpha$

$\dfrac{1+z+z^2}{z} = 2\cos\alpha + 1$

Cette expression est bien réelle, les trois points O, S et M sont bien alignés.