Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :
s'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n+1)^{\text{ieme}}$] est 0,8;
s'il n'a pas arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 .
la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7
Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note $p(E)$ la probabilité de E, $\overline{E}$ l'événement contraire de E. On note $p(E / F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant que F est réalisé. A_n est l'événement "le gardien arrête le n^{ieme} tir".
On a donc $p(A_1) = 0,7$.

1. *a* : Donnez pour $n > 1$ les valeurs de $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(\overline{A}_{n+1} / A_n)$
b : Exprimez $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de $p(A_n)$
c : Déduisez-en que, pour tout entier strictement positif $n \geq 1$ on a : $p(A_{n+1}) = 0,2\, p(A_n) + 0,6$.

On pose à présent, pour $n > 1$, $p_n = p(A_n)$ *et* $u_n = p_n - 0,75$

2. *a* : Démontrez que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2
b : Déduisez-en une expression de p_n en fonction de n
c : Montrez que (p_n) admet une limite que l'on calculera.

CORRECTION

1. *a* : D'après l'énoncé ; la probabilité qu'*a* le gardien d'arrêter le tire $(n+1)$; s'il a arrêté le tir n est 0,8 : Donc $p(\text{A}_{n+1} / \text{A}_n) = 0,8$
De même ; la probabilité qu'il n'arrête le tire $(n+1)$ s'il n'a pas arrêté le tir n est 0,6. Donc ; $p(\text{A}_{n+1} / \overline{\text{A}}_n) = 0,6$.

b : D'après le principe des probabilités conditionnelles ; on a : $p(\text{A}_{n+1} \cap \text{A}_n) = p(\text{A}_{n+1} / \text{A}_n) \times p(\text{A}_n)$
donc $p(\text{A}_{n+1} \cap \text{A}_n) = 0,8\, p(\text{A}_n)$
De même ; on a : $p(\text{A}_{n+1} \cap \overline{\text{A}}_n) = 0,6\, p(\overline{\text{A}}_n)$

c : D'après la loi des Probabilités Totales ; on a :
$p(\text{A}_{n+1} \cap \text{A}_n) + p(\text{A}_{n+1} \cap \overline{\text{A}}_n) = p(\text{A}_{n+1})$
Mais d'après la question précédente ; on a aussi :
$p(\text{A}_{n+1} \cap \text{A}_n) + p(\text{A}_{n+1} \cap \overline{\text{A}}_n) = 0,8\, p(\text{A}_n) + 0,6\, p(\overline{\text{A}}_n)$.
Comme $p(\overline{\text{A}}_n) = 1 - p(\text{A}_n)$; on comparant ces deux égalités ; on peut écrire :
$p(\text{A}_{n+1}) = 0,8\, p(\text{A}_n) + 0,6\, p(\overline{\text{A}}_n)$
$p(\text{A}_{n+1}) = 0,8\, p(\text{A}_n) + 0,6\, [1 - p(\text{A}_n)]$
$p(\text{A}_{n+1}) = 0,2\, p(\text{A}_n) + 0,6$.
Ce qui est bien l'égalité demandée.

2. $p_n = p(\text{A}_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.
a : Si n est un entier positif quelconque ; alors on a :
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$
$u_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,6 - 0,75$; d'après la relation établie dans la question 1.*c* :
$u_{n+1} = 0,2\, p_n - 0,15$
$u_{n+1} = 0,2[p_n - 0,75]$
$u_{n+1} = 0,2\, u_n$; d'après la définition de la suite (u).
La suite (u) est donc bien une suite géométrique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,75 = -0,05$.

b : L'expression de u_n en fonction de n est alors :
$u_n = (-0,05) \,.\, (0,2)^{n-1}$.
On en déduit alors l'expression de p_n en fonction de n :
$p_n = 0,75 - 0,05 \,.\, (0,2)^{n-1}$

c : Comme $(0,2)^{n-1}$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$; on en déduit que la suite (p) tend vers 0,75