Partie A

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$.

   Déterminer toutes les solutions de (E)

Soit (E ') l'équation différentielle : $y' - 2y = 8x^2 - 8x$

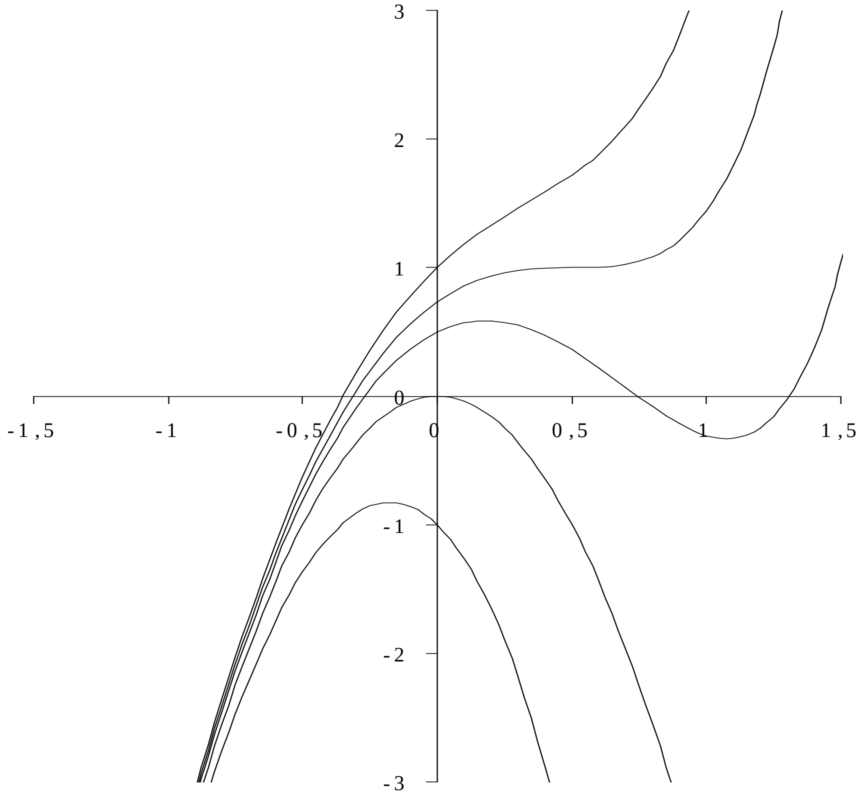
2. *a*. Déterminer une fonction P, polynôme du second degré, solution de (E ').

   b. Démontrer que f est une solution de (E ') si et seulement si $f - \text{P}$ est solution de (E).

   c. Déterminer toutes les solutions de (E ').

Partie B

m est un réel, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = m\,\text{e}^{2x} - 4x^2$ et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$. La figure ci-dessous donne pour quelques valeurs de m les courbes représentatives C_m associées.



L'objet du problème est d'étudier la famille des fonctions f_m ainsi définies.

1. La figure ci-dessus semble indiquer que les courbes C_m n'ont pas de points communs.

   a. Démontrez que par un point M $(x_0 ; y_0)$ donné, il passe une courbe C_m et une seule.

   b. Soit un réel a fixé, exprimer l'ordonnée du point de C_m d'abscisse a en fonction de m.

   Soit $h(m)$ cette ordonnée. Montrer que h est une fonction croissante de m sur $\mathbb{R}$.

2. *a*. Vérifiez, pour tout réel x, que : $f'_m(x) = 2\,\text{e}^{2x}\,[m - 4x\,\text{e}^{-2x}]$.

   b. Déduisez-en que le signe de $f_m(x)$ est le même que celui de $m - 4x\,e^{-2x}$.

3. *a*. Étudiez les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x\,\text{e}^{-2x}$ et construisez sa courbe représentative Γ.

   b. Déduisez le signe de $f'_m(x)$ de la question précédente.

4. *a*. Étudiez les variations de f_m selon les valeurs du paramètre m.

   b. Dressez le tableau de variations f_m dans chacun des cas suivants :

   - $m > \dfrac{2}{\text{e}}$;
   - $m = \dfrac{2}{\text{e}}$;
   - $0 < m < \dfrac{2}{\text{e}}$;
   - $m = 0$;
   - $m < 0$.

5. Les courbes tracées dans la première partie correspondent à $m = \dfrac{2}{\text{e}}$; $m = 0$; $m = 1$; $m = -1$; $m = 0{,}5$.

Identifiez ces courbes en justifiant votre choix.

CORRECTION

Partie A

1. $f(x) = 20\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 10\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

Soit $X = \dfrac{1}{2}x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$

$20\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 10\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 40\,X\,\mathrm{e}^{-X} + 10\,\mathrm{e}^{-X}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$

donc $\lim\limits_{X \to +\infty} 40\,X\,\mathrm{e}^{-X} + 10\,\mathrm{e}^{-X} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. La dérivée de e^u est $u'\,\mathrm{e}^u$ donc : $f'(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + (20\,x + 10)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = (-10\,x + 15)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-10\,x + 15$

x	0		$1{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	10	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

$M = f(1{,}5) = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}75}$

Partie B

1. $f'(t) = (-10\,t + 15)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $f(t) = (20\,t + 10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc

$f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = (-10\,t + 15)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2}(20\,t + 10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

$f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = (-10\,t + 15 + 10\,t + 5)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc f est solution de (E)

2. *a*. g est une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$, donc $g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

f est solution de (E) donc $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

$(g - f)'(t) + \dfrac{1}{2}(g - f)(t) = g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) - f'(t) - \dfrac{1}{2}f(t)$

$(g - f)'(t) + \dfrac{1}{2}(g - f)(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc $(g - f)'(t) + \dfrac{1}{2}(g - f)(t) = 0$

donc $g - f$ est solution, sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E') $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

(E') a pour solution les fonctions de la forme : $t \to C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc $(g - f)(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

$g(t) = f(t) + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = (20\,t + 10 + C)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

c. $g(0) = 10$ donc $10 + C = 10$ donc $C = 0$ donc $g(t) = f(t)$ donc f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

3. f est définie continue, strictement croissante sur $[0 ; 1{,}5]$, $10 \in f([0 ; 1{,}5])$ donc l'équation $f(x) = 10$ admet une seule solution 0 sur $[0 ; 1{,}5]$

f est définie continue, strictement décroissante sur $[1{,}5 ; +\infty[$, $f([1{,}5 ; +\infty[) =]0 ; f(1{,}5)]$; $f(1{,}5) > 10$ donc $0 \in]0 ; f(1{,}5)]$ donc l'équation $f(x) = 10$ admet une seule solution α sur $[1{,}5 ; +\infty[$.

$f(4{,}67) > 10$ et $f(4{,}68) < 10$, f est strictement décroissante sur $[1{,}5 ; +\infty[$, donc $4{,}67 \le \alpha \le 4{,}68$

Le temps est exprimé en heures. $4{,}67 \times 60 = 280{,}2$ et $4{,}68 \times 60 = 280{,}8$ donc il faut environ 280 minutes soit 4 *h* et 40 minutes pour que la température de cette réaction chimique redescende à sa valeur initiale.