Liban juin 2009

EXERCICE 1 3 points

Pour chacune des trois questions. une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\frac{2}{5}$ ***b.*** $\frac{2}{3}$ ***c.*** $\frac{3}{5}$ ***d.*** $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$. On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \le t)$ notée $p(X \le t)$, est donnée par $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

a. 0,91 ***b.*** 0,18 ***c.*** 0,19 ***d.*** 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

Je sors mon chien; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

a. $\frac{9}{10}$ ***b.*** $\frac{27}{40}$ ***c.*** $\frac{3}{4}$ ***d.*** $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier la position relative de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\, dx$

2. On admet que pour tout réel x, $\ln(1 + e^{-x}) \le e^{-x}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \le 1$. La suite $(d_n)_{n \ge 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).

On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

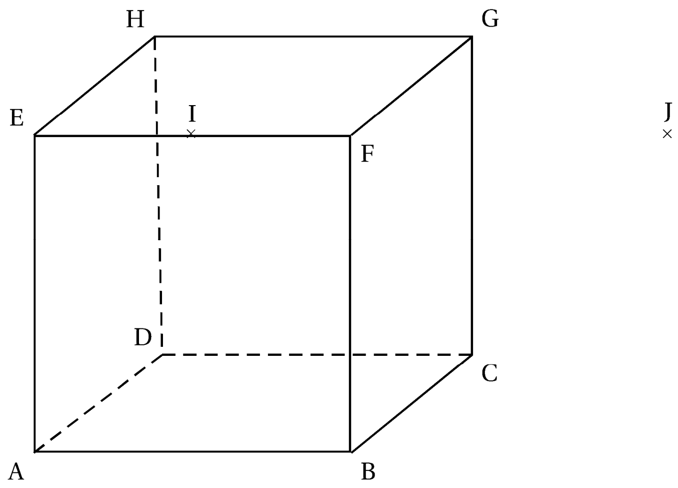
Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.

Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. *a.* Déterminer les coordonnées des points I et J.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

2. Placer les points A, B et C.

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} i z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. *a.* Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

b. Placer les points A', B' et C'.

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

a. Déterminer les affixes des points G et G′.

b. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

(On ne demande pas de tracer cette parabole)

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10\,000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. *a.* Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. *a*. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

***b*.** Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

Partie C

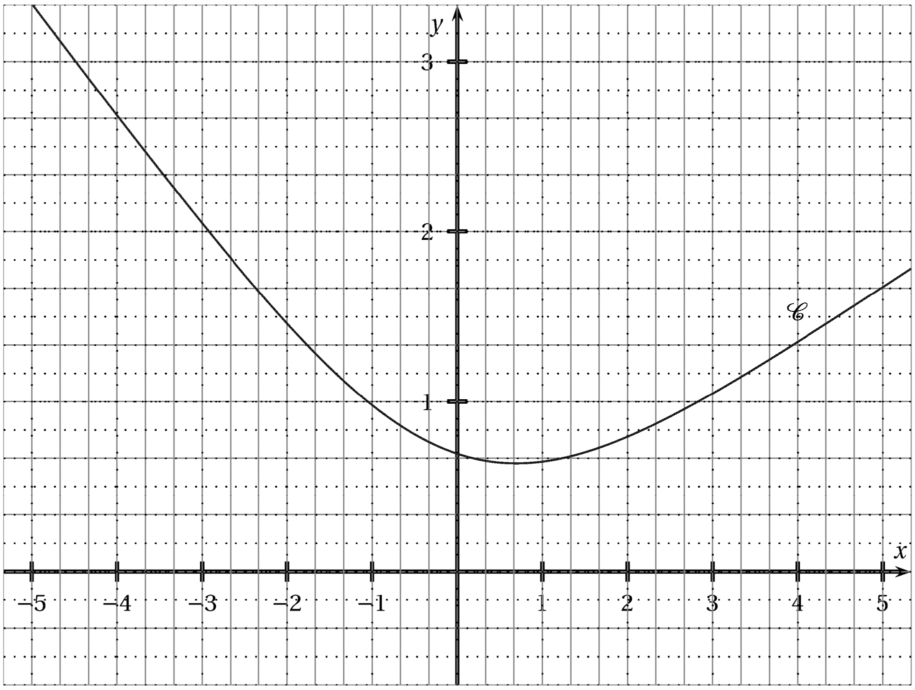
1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 2



CORRECTION

EXERCICE 1 3 points

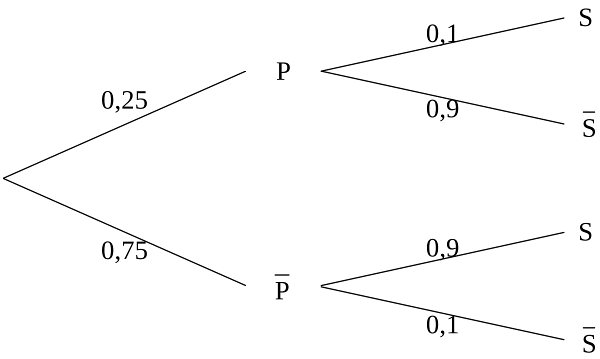
1. $p(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$ donc $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \dfrac{2}{5}$

A et B sont deux évènements indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \dfrac{2}{5}\,p(B)$ donc :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{5} + p(B) - \dfrac{2}{5}\,p(B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}\,p(B) = \dfrac{4}{5}$ donc $2 + 3\,p(B) = 4$ soit $p(B) = \dfrac{2}{3}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.
On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leq t)$ notée $p(X \leq t)$, est donnée par $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ donc $p(X > t) = e^{-\lambda t}$
La valeur approchée de $p(X > 5) = e^{-0{,}04 \times 5} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}82$

3. Soit les événements : P « il pleut » et S « je sors mon chien »



$p(S) = p(P \cap S) + p(\overline{P} \cap \overline{S}) = 0{,}25 \times 0{,}1 + 0{,}75 \times 0{,}9 = 0{,}7$

$p_S(\overline{P}) = \dfrac{p(S \cap \overline{P})}{p(S)} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}9}{0{,}7} = \dfrac{27}{28}$

EXERCICE 2 8 points

Partie A

1. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + 1 = 1$ or $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3}x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{1}{3}x = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (C).

c. $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $1 + e^{-x} > 1$
La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$ soit $\ln(1 + e^{-x}) > 0$
donc pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{3}x > 0$ donc la courbe (C) est au dessus de (D).

d. pour tout réel x, $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + e^x) - x + \dfrac{1}{3}x$

pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$.

e. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

On pourrait en déduire que la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe (C).

2. *a.* $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3e^x - 2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \dfrac{e^x - 2}{3(e^x+1)}$

b. $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$, la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$
d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	M	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. La courbe (C) est au dessus de la droite (D) pour tout x réel, $n \geq 0$ donc $d_n = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx$

2. Les fonctions $x \to \ln(1+e^{-x})$ et $x \to e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$ de plus $n \geq 1$ donc :
$\int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx \leq \int_0^n e^{-x}\,dx$ soit $d_n \leq \left[-e^{-x}\right]_0^n = 1 - e^{-n}$ donc $d_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$

$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-x})\,dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\,dx$

La fonction $x \to \ln(1+e^{-x})$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $n < n+1$ donc $\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\,dx \geq 0$ donc la suite d_n est croissante.

La suite d_n est croissante majorée par 1 donc est convergente.

Partie C

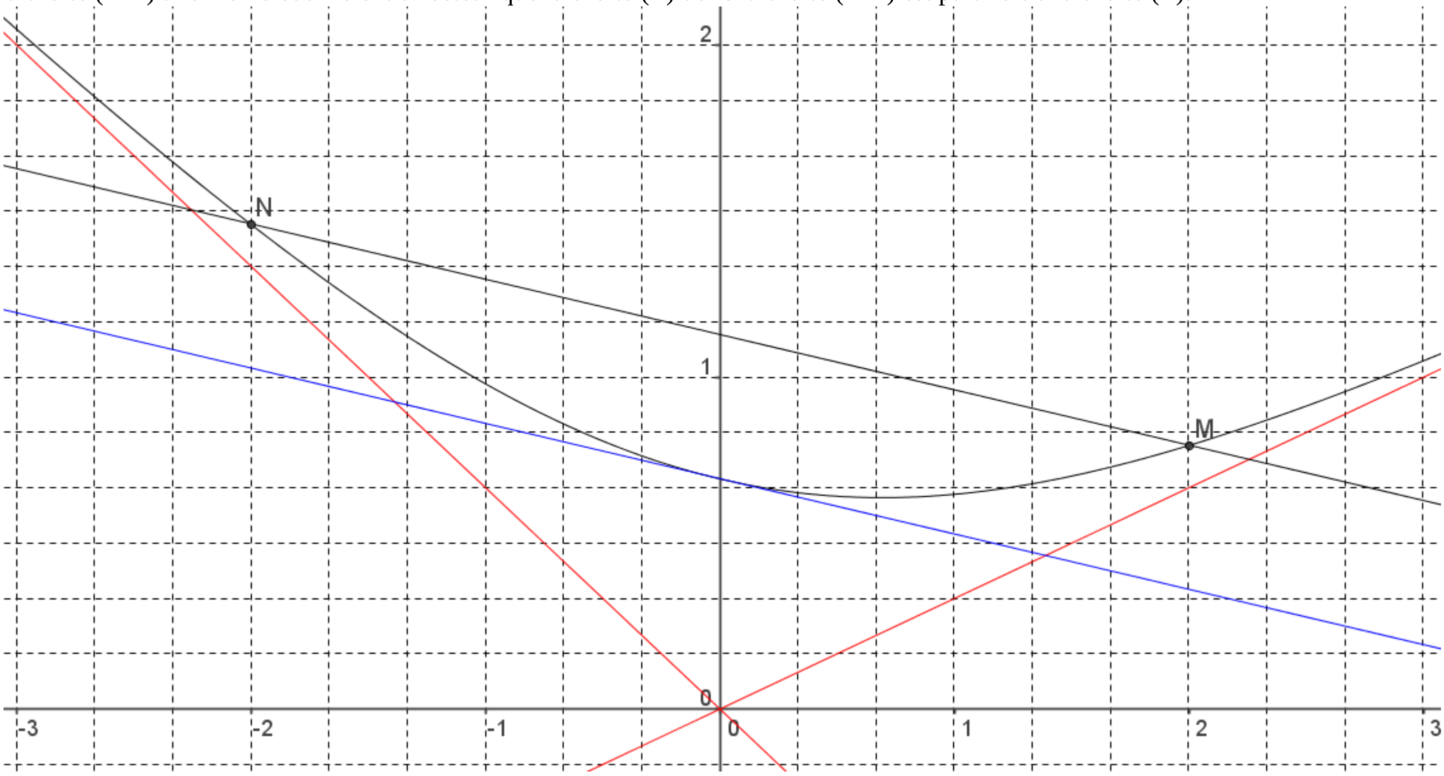
1. le coefficient directeur de (T) est $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$

2. M a pour abscisse x et pour ordonnée $y = \ln(1+e^x) - \dfrac{2}{3}x$ et N a pour abscisse $x' = -x$ et pour ordonnée $y' = f(x')$

$y' = \ln(1+e^{x'}) - \dfrac{2}{3}x' = \ln(1+e^{-x}) + \dfrac{2}{3}x = \ln(1+e^x) - \dfrac{1}{3}x$

Le coefficient directeur de (MN) est $\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{\ln(1+e^x) - \dfrac{2}{3}x - \left[\ln(1+e^x) - \dfrac{1}{3}x\right]}{x+x} = -\dfrac{\frac{1}{3}}{2} = -\dfrac{1}{6}$

la droite (MN) a le même coefficient directeur que la droite (T) donc la droite (MN) est parallèle à la droite (T).



EXERCICE 3 4 points

1. *a.* E a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) et F (1 ; 0 ; 1) donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$.

J est le symétrique de E par rapport à F donc F est le milieu de [EJ] donc $x_F = \frac{1}{2}(x_E + x_J)$; $y_F = \frac{1}{2}(y_E + y_J)$; $z_F = \frac{1}{2}(z_E + z_J)$

F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) donc $1 = \frac{1}{2}x_J$; $0 = \frac{1}{2}y_J$; $1 = \frac{1}{2}(1 + z_J)$ donc J a pour coordonnées (2 ; 0 ; 1).

b. D a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{DJ}$ a pour coordonnées (2 ; – 1 ; 1)

$\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ et $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1)

$\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{DJ} = -\frac{1}{2}\times 2 + 0\times(-1) + 1\times 1 = 0$ et $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BG} = 0\times 2 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$

(DJ) est donc orthogonale aux droites (BI) et (BG), ce sont deux droites sécantes du plan (BGI) donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc $2x - y + z + d = 0$
B $\in$ (BGI) donc $2\times 1 - 0 + 0 + d = 0$ soit $d = -2$
Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc $2x - y + z - 2 = 0$

d. la distance du point F au plan (BGI) est $d = \frac{|\,2\times 1 - 0 + 1 - 2\,|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2. *a.* (Δ) est la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI) donc a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}$ donc (Δ) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{FM} = k\,\overrightarrow{DJ}$ avec k réel

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y = -k \\ z - 1 = k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -k \\ z = 1 + k \end{cases}$ avec k réel.

b. Le centre K de la face ADHE est le milieu de [DE] donc a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

Le point de (Δ) de paramètre $k = -\frac{1}{2}$ a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ donc K appartient à (Δ)

c. L appartient à (Δ) donc il existe un réel k tel que L soit le point de coordonnées $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -k \\ z = 1 + k \end{cases}$.

L appartient à (BGI) donc ses coordonnées vérifient $2x - y + z - 2 = 0$

soit $2(1 + 2k) + k + 1 + k - 2 = 0$ soit $6k + 1 =$ donc $k = -\frac{1}{6}$

Le point de (Δ) de paramètre $k = -\frac{1}{6}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.

La droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.

d. $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$ et $\overrightarrow{GI}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{BL}\,.\,\overrightarrow{GI} = \frac{-1}{3}\times\frac{-1}{2} - 1\times\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\times 0 = 0$

donc les droites (BL) et (GI) sont perpendiculaires, (BL) est la hauteur issue de B du triangle BGI

$\overrightarrow{GL}$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1}{3}\,;\frac{-5}{6}\,;\frac{-1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ donc $\overrightarrow{GL}\,.\,\overrightarrow{BI} = \frac{-1}{3}\times\frac{-1}{2} + 0\times\frac{-5}{6} + \frac{-1}{6}\times 1 = 0$

donc les droites (GL) et (BI) sont perpendiculaires, (GL) est la hauteur issue de G du triangle BGI
L est le point d'intersection de deux hauteurs du triangle BGI donc le point L est l'orthocentre du triangle BGI.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $|z_A|^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$ donc $|z_A| = \sqrt{3}$

$z_A = \sqrt{3}(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$ donc $\sqrt{3}\cos\theta = -\frac{3}{2}$ et $\sqrt{3}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ donc $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$z_A = \sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$; $z_B = \overline{z_A}$ donc $z_B = \sqrt{3}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

2. voir à la fin de l'exercice

3. $AB^2 = \left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$; $AC^2 = \left(-\frac{3}{2}+3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4} = 3$

$BC^2 = \left(-\frac{3}{2}+3\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4} = 3$ donc AB = AC = BC le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

1. *a.* Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

$a' = \frac{1}{3}\text{i}\,z_A^2 = \frac{1}{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{10\pi}{3}\right)} = \text{e}^{\text{i}\frac{13\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$;

$b' = \frac{1}{3}\text{i}\,z_B^2 = \frac{1}{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{10\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\text{i}\frac{-7\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

$c' = \frac{1}{3}\text{i}\,z_C^2 = \frac{1}{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \times 9 = 3\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

b. voir à la fin de l'exercice

c. $z_A = \sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et $b' = \text{e}^{\text{i}\frac{-5\pi}{6}}$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA}) = (\vec{u};\overrightarrow{OA}) - (\vec{u};\overrightarrow{OB'})$ or $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OB'}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA}) = 0 + 2k\pi$

Les points O, A, B' sont alignés.

De même, $z_B = \sqrt{3}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et $a' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$

$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}) = (\vec{u};\overrightarrow{OA'}) - (\vec{u};\overrightarrow{OB})$ or $(\vec{u};\overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OB}) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

soit $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}) = \pi + 2k\pi$ donc les points O, B, A' sont alignés.

2. *a.* G a pour affixe $g = \frac{1}{4}(z_O + z_A + z_B + z_C) = -\frac{3}{2}$

G' a pour affixe $g' = \frac{1}{3}\text{i}\,z_G^2 = \frac{1}{3}\text{i} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}\text{i}$

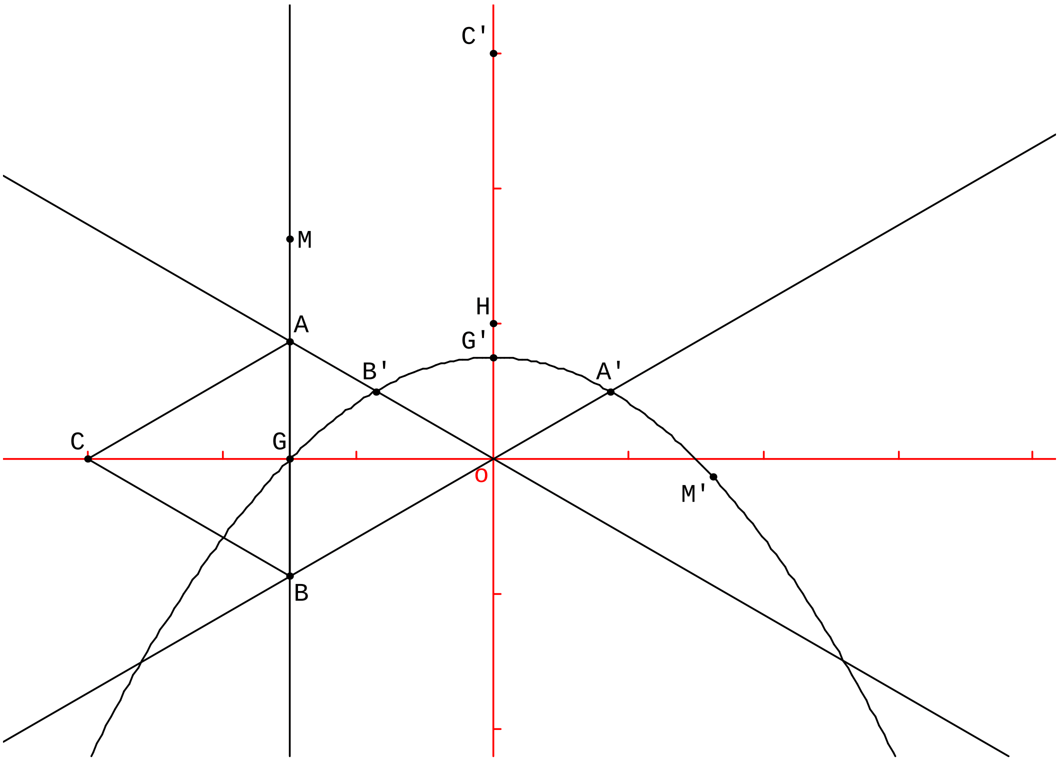
b. L'isobarycentre H des points O', A', B' et C' pour affixe $h = \frac{1}{4}(z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}) = \frac{1}{4}\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} + \text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}} + 3\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\right)$

soit $h = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}+3\text{i}\right) = \text{i}$ donc H ≠ G', G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

3. La droite (AB) a pour équation $x = -\frac{3}{2}$ donc si M appartient à (AB) il a pour affixe $z = -\frac{3}{2} + \text{i}\,y$

M' a pour affixe $z' = \frac{1}{3}\text{i}\left(-\frac{3}{2}+\text{i}\,y\right)^2 = \frac{1}{3}\text{i}\left(\frac{9}{4}-y^2-3y\text{i}\right) = y + \frac{1}{3}\text{i}\left(\frac{9}{4}-y^2\right)$ donc si $z' = x' + \text{i}\,y'$ avec x' et y' réels

alors $x' = y$ et $y' = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}-y^2\right)$ soit $y' = -\frac{1}{3}x'^2 + \frac{3}{4}$. donc M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.


C'
M
H
A
G'
B'
A'
C
G
O
M'
B

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $2\,009 = 16 \times 125 + 9$ donc $2\,009 \equiv 9 \bmod 16$ donc $2\,009^2 \equiv 9^2 \bmod 16$ or $81 = 5 \times 16 + 1$ donc $81 \equiv 1 \bmod 16$
le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16 est 1

2. $8\,000 = 2 \times 4\,000$ or $2\,009^{8\,000} = (2009^2)^{4000}$ donc $2\,009^{8\,000} \equiv 1^{4\,000} \bmod 16$ soit $2\,009^{8\,000} \equiv 1 \bmod 16$
$2\,009^{8\,001} = 2\,009^{8\,000} \times 2\,009$ donc $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. *a.* $2\,009 \equiv 1 \bmod 5$ donc $2\,009^2 \equiv 1 \bmod 5$ donc $2\,009^2 - 1$ est divisible par 5. u_0 est divisible par 5.

b. $(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + \binom{5}{5} b^5$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$ donc $(a+1)^5 - 1 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a = a\,[a^4 + 5a^3 + 10a^2 + 10a + 5\,]$
donc $(a+1)^5 - 1 = a\,[a^4 + 5(a^3 + 2a^2 + 2a + 1)]$ donc $u_{n+1} = u_n\,[\,u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$

c. Vérification : u_0 est divisible par 5 donc par 5^{0+1}. La propriété est vraie pour $n = 0$
Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si u_n est divisible par 5^{n+1} alors u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}.
u_n est divisible par 5^{n+1} donc 5 divise u_n donc 5 divise u_n^4 et donc $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$
donc il existe un entier relatif q tel que $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5q$ donc en remplaçant :
u_n est divisible par 5^{n+1} donc il existe un entier relatif Q tel que $u_n = 5^{n+1}$ Q
en remplaçant dans u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n\,[\,u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] = 5^{n+1} \times 5\,Q\,q = 5^{n+2}\,q\,Q$
q Q est un entier relatif donc u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. *a.* Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.
$u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = (2\,009^2 - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{10} - 1$
$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = (2\,009^{10} - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{50} - 1$
$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = (2\,009^{50} - 1 + 1)^5 - 1 = 2\,009^{250} - 1$
D'après la question précédente, u_3 est divisible par 5^4 donc par 625 donc $2\,009^{250} - 1 \equiv 0 \bmod 625$ soit $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.

b. $2\,009^{250} \equiv 1 \bmod 625$ donc $(2\,009^{250})^{32} \equiv 1 \bmod 325$ soit $2\,009^{8\,000} \equiv 1 \bmod 625$ soit $2\,009^{8\,000} \times 2\,009 \equiv 2\,009 \bmod 625$
$2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 625$

Partie C

1. $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 16$ et $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \bmod 625$ donc 16 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ et 625 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$
16 et 625 sont premiers entre eux donc 16×325 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ soit 10 000 divise $2\,009^{8\,001} - 2\,009$.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.
$2\,009^{8\,001} - 2\,009 \equiv 0 \bmod 10\,000$ donc l'écriture décimale de $2\,009^{8\,001}$ se termine par 2 009.
or $8\,001 = 3 \times 2\,667$ donc $2\,009^{8\,001} = (2\,009^{2\,667})^3$ donc il existe un entier naturel : $2\,009^{2\,667}$ tel que l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.