Pour tout réel x de U = $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$, on pose : $S_0(x) = \cos x$, $S_1(x) = \cos x + \cos x \sin x$ et $S(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

A.1. Etudier le sens de variation de S_1 sur U.

A.2. Etudier le sens de variation de S sur U.

B. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction S_n sur [0 ; 2 π] par $S_n(x) = \cos x\,(1 + \sin x + \sin^2 x + ... + \sin^n x)$ si $n \geq 1$ et $S_0(x) = \cos x$.

On pose $I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)\,dx$ et $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)\,dx$.

B.1. Calculer I_0, I_1 et I.

B.2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

En déduire par récurrence, que $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

B.3. Soient $A_n = I_{2n}$ et $B_n = I_{2n+1}$, montrer que (A_n) est décroissante et (B_n) croissante et que la limite de leur différence est 0.

B.4.*a*. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout x de U, $S(x) - S_n(x) = \sin^{n+1} x\,.\,S(x)$ et que $S_{2n+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x)$

B.4.*b*. En déduire que $B_n \leq I \leq A_n$ et montrer que A_n et B_n convergent vers I.

CORRECTION

A.1. S_1 est dérivable sur U comme produit de deux fonctions ($f(x) = \cos x$ et $g(x) = 1 + \sin x$) dérivables sur U donc S_1 est dérivable sur U.

$S_1'(x) = -\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x = -\sin x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$ (en utilisant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

or $-2X^2 - X + 1$ est un trinôme du second degré qui s'annule en -1 et $\frac{1}{2}$ donc $-2X^2 - X + 1 = (-2X + 1)(X + 1)$

$S_1(x) = (-2\sin x + 1)(\sin x + 1)$

Sur U, $-1 \leq \sin x \leq 0$ donc $3 \geq -2\sin x + 1 \geq 1$ et $0 \leq \sin x + 1 \leq 1$ donc $S_1'(x) \geq 0$ donc S_1 est croissante sur U.

A.2. S est dérivable sur U comme quotient de deux fonctions ($f(x) = \cos x$ et $g(x) = 1 - \sin x$) dérivables sur U donc S est dérivable sur U.

$S'(x) = \frac{-\sin x\,(1-\sin x) + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x}{(1-\sin x)^2}$ or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $S'(x) = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$

Sur U, $-1 \leq \sin x \leq 0$ donc $0 \leq 1 - \sin x \leq 2$ donc $S'(x) \geq 0$ donc S est croissante sur U.

B.1. $I_0 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 0 - (-1) = 1$

$$I_1 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,(1 + \sin x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(1+\sin x)^2\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times 0^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx = \left[-\ln(1-\sin x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\ln 1 - (-\ln 2) = \ln 2$$

B.2. $I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_{n+1}(x)\,dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)\,dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [S_{n+1}(x) - S_n(x)]\,dx$

or $S_{n+1}(x) - S_n(x) = \cos x \sin^{n+1} x$ de la forme $u'\,u^{n+1}$ avec $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \sin x$ donc une primitive de $S_{n+1} - S_n$ est la fonction F définie sur U par $F(x) = \frac{1}{n+2}\sin^{n+2} x$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [S_{n+1}(x) - S_n(x)]\,dx = \left[\frac{1}{n+2}\sin^{n+2} x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 0 - \frac{1}{n+2}(-1)^{n+2} = -\frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

Montrons par récurrence que $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$I_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{0+1}$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Montrons que pout tout n de $\mathbb{N}$, si $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}$, alors $I_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} .+ \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

$I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$ donc $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$ .or $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}$ donc $I_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} .+ \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

B.3. Soient $A_n = I_{2n}$ et $B_n = I_{2n+1}$, montrer que A_n est décroissante et B_n croissante et que la limite de leur différence est 0.

$A_{n+1} - A_n = I_{2(n+1)} - I_{2n} = I_{2n+2} - I_{2n}$

$I_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$

$I_{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} .+ \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} = I_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1}$

$A_{n+1} - A_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

(rappel $(-1)^2 = 1$ donc $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$)

$n \in$ N donc $A_{n+1} - A_n < 0$ donc (A_n) est décroissante

$B_{n+1} - B_n = I_{2(n+1)+1} - I_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)}$

$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)}$

$n \in$ N, donc $\frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0$ donc (B_n) est croissante

$B_n - A_n = I_{2n+1} - I_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = -\frac{1}{2n+2}$ donc $\lim_{n \to +\infty} B_n - A_n = 0$

B.4.a. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$ ici $q = \sin x$ et $x \in$ U donc $\sin x \neq 1$

$S_n(x) = \cos x\,(1 + \sin x + \sin^2 x + ... + \sin^n x) = \cos x \times \frac{1-\sin^{n+1} x}{1-\sin x} = (1 - \sin^{n+1} x)\,\frac{\cos x}{1-\sin x} = (1-\sin^{n+1} x)\,S(x)$

$S(x) - S_n(x) = S(x) - (1 - \sin^{n+1} x)\,S(x) = [\,1 - (\,1 - \sin^{n+1} x)\,]\,S(x) = \sin^{n+1} x \,.\, S(x)$

$S(x) - S_{2n}(x) = \sin^{2n+1} x \,.\, S(x)$

$x \in$U donc $\sin x \in [-1\,;\,0]$ donc $\sin^{2n+1} x \leq 0$, de plus $\cos x \in [\,0\,;\,1\,]$ donc $\cos x \geq 0$ donc $S(x) \geq 0$ donc $\sin^{2n+1} x \,.\, S(x) \leq 0$

donc $S(x) - S_{2n}(x) \leq 0$ pour tout x de U donc pour tout x de U, $S(x) \leq S_{2n}(x)$

$S(x) - S_{2n+1}(x) = \sin^{2n+2} x \,.\, S(x)$

$\sin^{2n+2} x = [\sin^n x]^2$ donc $\sin^{2n+2} x \geq 0$, de plus $\cos x \in [\,0\,;\,1\,]$ donc $\cos x \geq 0$ donc $S(x) \geq 0$ donc $\sin^{2n+2} x \,.\, S(x) \geq 0$

donc pour tout x de U, $S(x) - S_{2n+1}(x) \geq 0$ donc pour tout x de U, $S(x) \leq S_{2n+1}(x)$

B.4.b. En déduire que $B_n \leq I \leq A_n$ et montrer que A_n et B_n convergent vers I.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout x de U, $S_{2n+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x)$

Les fonctions S, S_{2n} et S_{2n+1} sont continues sur I donc $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_{2n+1}(x)\,dx \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)\,dx \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_{2n}(x)\,dx$ donc $B_n \leq I \leq A_n$

(A_n) est décroissante, (B_n) est croissante et $\lim_{n \to +\infty} B_n - A_n = 0$ donc les suites (A_n) et (B_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite ℓ. Comme pour tout n de N, $B_n \leq I \leq A_n$ alors $\ell \leq I \leq \ell$ donc $\ell = I$