Un laboratoire pharmaceutique a mis au point un test sanguin de dépistage d'une maladie.
On sait que la probabilité qu'un individu soit atteint de cette maladie est p. On considère un groupe de n individus testé pour cette maladie.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de tests positifs.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.

2. Quelle est la valeur de $p(X \geq 1)$?

3. Afin de minimiser le cout des tests, le laboratoire fait un 1[er] test en regroupant les n échantillons de sang prélevés. Si ce test est négatif, alors le labo peut être sur que les n individus testés ne sont pas atteints par la maladie. Le laboratoire a eu besoin d'un seul test pour connaitre le résultat des n individus. Dans le cas contraire, le laboratoire réalise un test sur chaque échantillon prélevé. Le laboratoire a alors réalisé en tout $n + 1$ tests.
Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de tests réalisés par le laboratoire.
a. Donner les valeurs que peut prendre Y.
b. Quelle loi suit Y ?
c. Démontrer que $E(Y) = n + 1 - n(1 - p)^n$.

4. Soit Z la variable aléatoire correspondant au nombre de tests réalisés sur un seul échantillon de sang. On admet $Z = \frac{1}{n} Y$.
a. Donner les valeurs que peut prendre Z.
b. Quelle loi suit Z ?

5. On admet que $p = 0{,}009$. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 - (1 - p)^n + \frac{1}{n}$
a. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice.
b. En déduire la valeur de n pour laquelle u_n admet la plus petite valeur.
c. En déduire la valeur de n pour laquelle le coût par individu est le moins important. Chaque test coute 10 € au laboratoire. En pratiquant cette méthode, quelle est l'économie réalisée par le laboratoire (en euros par individus) ?

CORRECTION

1. On a une succession de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes (effectuer un test sanguin). Chaque épreuve *a* deux issues :

- le test est positif (probabilité p)
- le test est négatif (probabilité $q = 1 - p$)

donc la variable aléatoire X correspondant au nombre de tests positifs suit une loi binomiale de paramètres $(n ; p)$.

2. Quelle est la valeur de $p(X \geq 1)$?
$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - q^n$
$p(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$

3. a. Soit le mélange de sang fourni un test négatif et Y prend la valeur 1
Soit le mélange de sang fourni un test positif et Y prend la valeur $n + 1$

b. $p(Y = 1) = (1 - p)^n$ et $p(Y = n + 1) = [1 - (1 - p)^n]$

c. $E(Y) = 1 \times = (1 - p)^n + (n + 1)\, p(Y = n + 1)$
$E(Y) = (1 - p)^n + (n + 1)[1 - (1 - p)^n]$
$E(Y) = (1 - p)^n + (n + 1) - (n + 1)(1 - p)^n$
$E(Y) = (n + 1) + (1 - p)^n - n(1 - p)^n - (1 - p)^n$
$E(Y) = n + 1 - n(1 - p)^n$.

4. a. Y prend les valeurs 1 et $n + 1$ donc Z prend les valeurs $\frac{1}{n}$ et $\frac{n+1}{n}$.

b. $P\left(Z = \frac{1}{n}\right) = p(Y = 1) = (1 - p)^n$
$P\left(Z = \frac{n+1}{n}\right) = p(Y = n + 1) = [1 - (1 - p)^n]$

c. $E(Y) = n + 1 - n(1 - p)^n = n[1 - (1 - p)^n] + 1$ donc $E(Z) = \frac{1}{n} E(Y) = 1 - (1 - p)^n + \frac{1}{n}$

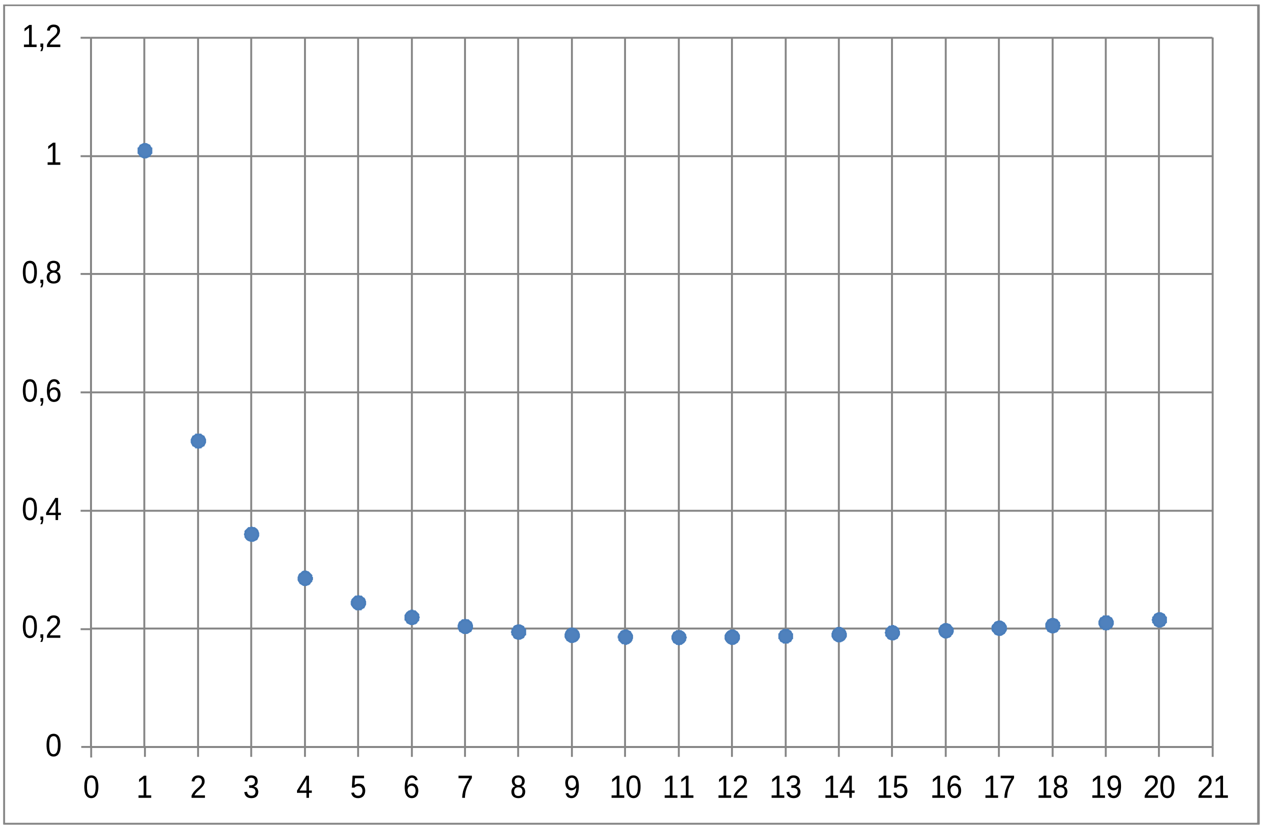
5. a. Pour tracer les points : sur Casio aller dans le menu RECUR
Choisir Type, la suite étant définie en fonction de n, choisir a_n = A n + B

Taper dans a_n : $a_n = 1 - 0{,}991^n + \dfrac{1}{n}$

Configurer le SET (ou le RANG suivant le modèle)
Sart : 1
End : 20
Exit
Choisir Tbl (F6)
puis dans Table choisir G Plt (F6)
Pour mieux voir les points, il convient de modifier l'affichage en prenant Shit Windows puis :
x min : 0
x max : 20
y min : – 0,1
y max : 1,2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1,009	0,51792	0,36009	0,28552	0,24420	0,21947	0,20418	0,19477	0,18926	0,18644

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	0,18557	0,18614	0,18781	0,19032	0,19348	0,19718	0,20129	0,20574	0,21046	0,21541



b. D'après les valeurs de la table, la valeur de n pour laquelle u_n admet la plus petite valeur est $n = 11$.

c. E(Z) représente le coût moyen par individu, il sera le moins important quand $n = 11$.
Si $n = 11$, EZ) = 0,18557 donc le coût moyen par individu est de l'ordre de 0,19 € donc l'économie est 10 – 0,19 = 9,81 € par individu.