Partie A

1. *a.* $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$ donc la limite en $+\infty$ de $f_1(x)$ est 0 et la limite de $f_1(x)$ en $-\infty$ est 0.

Γ_1 admet à l'infini la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.

b. f_1 est une fonction impaire, il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0\ ;+\infty[$.

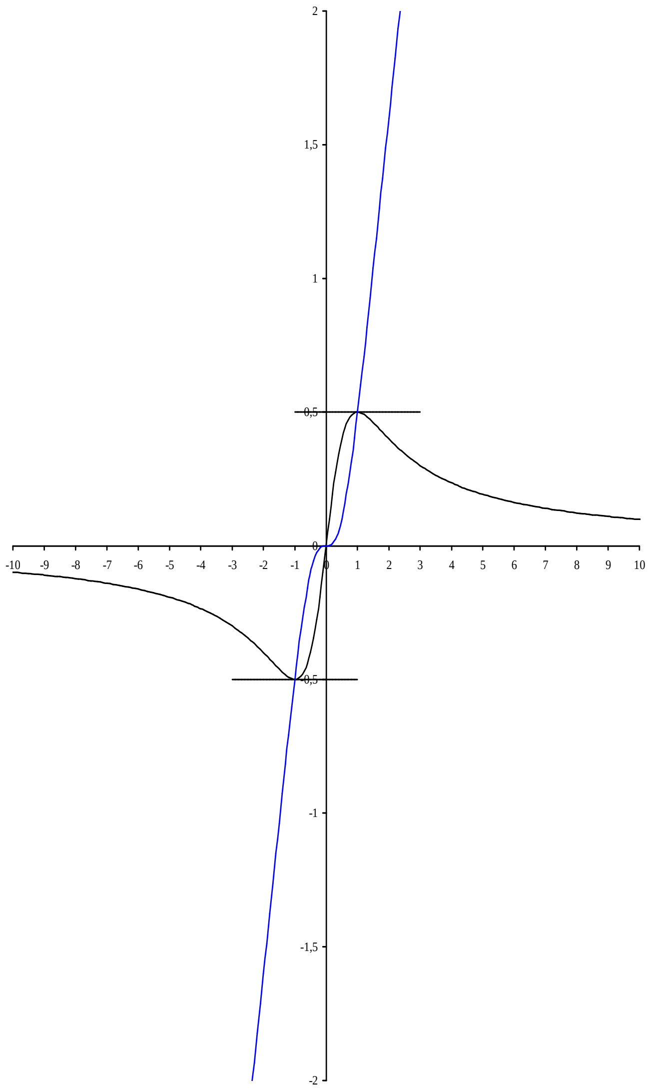
$f'_1(x) = \dfrac{(1+x^2) - 2x \times x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ donc $f'_1(x) = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

$x \geq 0$ donc $f'_1(x)$ a le même signe que $1 - x$

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ d'où le tableau de variations de f_1.

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	–	
f_1	0	↗	0,5	↘	0

c.



Γ_3 en bleu et Γ_1 en noir

d. Soit $u(x) = 1 + x^2$ alors $u'(x) = 2x$

$f_1(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$; u est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f_1 admet pour primitive la fonction $x \to \dfrac{1}{2}\ \ln[\,u(x)\,]$

$I_1 = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}\ln 2$

2. *a.* $f_3(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ donc la limite en $+\infty$ de $f_3(x)$ est $+\infty$ et la limite en $-\infty$ de $f_3(x)$ est $-\infty$.

On peut remarquer (mais ce n'est pas demandé) que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à C_3 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. f_1 est une fonction impaire, il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0 ; +\infty[$.

$f'_3(x) = \dfrac{3x^2(1+x^2) - 2x \times x^3}{(1+x^2)^2} = x^2 \dfrac{3+x^2}{(1+x^2)^2}$

Pour tout x réel, $\dfrac{3+x^2}{(1+x^2)^2} > 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $f'_3(x)$ est toujours positive (nulle en 0)

d'où le tableau de variations de f_3.

x	0	$+\infty$
$f'_3(x)$	0	$-$
f_3	0 ↗	$+\infty$

3. $I_1 + I_3 = \int_0^1 f_1(t)\,dt + \int_0^1 f_3(t)\,dt$

$I_1 + I_3 = \int_0^1 \left(f_1(t) + f_3(t)\right) dt$ or $f_1(t) + f_3(t) = \dfrac{t}{1+t^2} + \dfrac{t^3}{1+t^2} = \dfrac{t(1+t^2)}{1+t^2} = t$ donc $I_1 + I_3 = \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$

donc $I_3 = \dfrac{1}{2} - I_1$ donc $I_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$

4. Sur $[0 ; 1]$; $x \leq x^3$ donc $f_1(x) \leq f_3(x)$ donc $A = \int_0^1 \left(f_3(t) - f_1(t)\right) dt = I_3 - I_1 = \dfrac{1}{2} - \ln 2$ en unités d'aires.

Partie B

1. *a.* $f_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc la limite en $+\infty$ de $f_0(x)$ est 0 et la limite de $f_0(x)$ en $-\infty$ est 0.

Γ_0 admet à l'infini la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.

b. f_0 est une fonction paire, il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0 ; +\infty[$.

$f'_0(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$x \geq 0$ donc $f'_1(x)$ est toujours négative sur $[0 ; +\infty[$ (nulle en 0) d'où le tableau de variations de f_0.

x	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	0	$-$
f_0	1 ↘	0

2. *a.* f_0 est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ donc a_n est la mesure de l'aire limitée par la courbe de f_0, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

b. $a_n = \int_0^n \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ et $a_{n+1} = \int_0^{n+1} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

En utilisant la relation de Chasles : $a_{n+1} = \int_0^n \dfrac{1}{1+t^2}\,dt + \int_n^{n+1} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt = a_n + \int_n^{n+1} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

f_0 est définie, continue, positive sur $\mathbb{R}$, $n \leq n+1$ donc $\int_n^{n+1} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \geq 0$ donc $a_{n+1} \geq a_n$

la suite (a_n) est croissante.

c. Pour tout réel t, $t^2 \geq 0$ donc $1 + t^2 \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

Les fonctions $t \to \frac{1}{1+t^2}$ et $t \to 1$ sont définies continues sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t : $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ donc :

$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 1\,dt$ or $\int_0^1 1\,dt = 1$ donc $a_1 \leq 1$.

d. $1 > 0$ donc pour tout réel t : $1 + t^2 \geq 1$; pour tout réel t non nul : $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

Les fonctions $t \to \frac{1}{1+t^2}$ et $t \to \frac{1}{t^2}$ sont définies continues sur $[1 ; n]$ et pour tout réel t non nul : $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ donc :

$$\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt$$

or $\int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$ donc $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq 1 - \frac{1}{n}$

e. $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt$ or $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq 1 - \frac{1}{n}$ donc $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq 1$

$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq 1$ donc $a_n \leq 1 + 1$ soit $a_n \leq 2$

La suite (a_n) est croissante majorée par 2 donc converge vers une limite L et $0 \leq L \leq 2$

Partie C

1\. *a.* $H(0) = F[\tan(0)] = F(0) = 0$

b. La fonction $x \to \tan(x)$ est définie dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

F dérivable sur $\mathbb{R}$ donc leur composée H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

$H'(x) = F'[\tan(x)] \times (1 + \tan^2 x)$

$H'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x} \times (1 + \tan^2 x)$

$H'(x) = 1$

c. Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $H'(x) = 1$ donc $H(x) = x + k$ or $H(0) = 0$ donc $k = 0$

Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ $H(x) = x$.

d. $H\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = F(1)$ or $H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

2\. *a.* les fonctions $x \to \left(\frac{1}{x+1}\right)$ et $x \to \left(\frac{x}{x+2}\right)$ sont des fractions rationnelles définies sur $\mathbb{R}^+$ donc dérivables sur $\mathbb{R}^+$; F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc les fonctions composées $x \to F\left(\frac{1}{x+1}\right)$ et $x \to F\left(\frac{x}{x+2}\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$k'(x) = F'\left(\frac{1}{x+1}\right) \times \frac{-1}{(x+1)^2} + F'\left(\frac{x}{x+2}\right) \times \frac{2}{(x+2)^2}$ donc $k'(x) = \frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2} \times \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{(x+2)^2}{x^2+(x+2)^2} \times \frac{2}{(x+2)^2}$.

$k'(x) = \frac{-1}{1+(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+(x+2)^2}$ donc $k'(x) = \frac{-x^2-(x+2)^2+2+2(x+1)^2}{[1+(x+1)^2][x^2+(x+2)^2]}$

or $2 + 2(x+1)^2 = 2x^2 + 4x + 4 = x^2 + (x+2)^2$ donc $k'(x) = 0$

k est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$ $k(x) = k(0)$, $k(0) = F(1) + F(0) = \frac{\pi}{4}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}^+$ $k(x) = \frac{\pi}{4}$

b. pour tout x de $\mathbb{R}^+$ $k(x) = \frac{\pi}{4}$, en particulier $k(1) = \frac{\pi}{4}$ or $k(1) = F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$ donc $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.