ASIE JUIN 2005

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(\mathrm{e}^2 - 1)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \mathrm{I}_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que : $\mathrm{e}^2 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} \right)$.

CORRECTION

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1!}(2-x)^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

Par intégration par parties, en posant $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x & u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = 2 - x & v'(x) = -1 \end{cases}$ donc $\mathrm{I} = \Big[(2-x)\mathrm{e}^x \Big]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 -\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = -2 + \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -2 + \Big[\mathrm{e}^x \Big]_0^2 = -2 + \mathrm{e}^2 - 1 = \mathrm{e}^2 - 3.$

2. Pour tout x de $[0\,;2]$: $0 \leq (2-x) \leq 2$ donc pour tout x de $[0\,;2]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq (2-x)^n \leq 2^2$

donc pour tout x de $[0\,;2]$: $0 \leq \dfrac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \leq \dfrac{2^n}{n!}\mathrm{e}^x$

Les fonctions $x \to \dfrac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x$ et $x \to \dfrac{2^n}{n!}\mathrm{e}^x$ sont continues sur $[0\,;2]$ donc $0 \leq \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n!}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

soit $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{2^n}{n!}\Big[\mathrm{e}^x \Big]_0^2$ soit $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(\mathrm{e}^2 - 1)$.

3. Soit $v(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times (n+1) \times (-1)(2-x)^{n+1} = -\dfrac{1}{n!}(2-x)^n$

Par intégration par parties, en posant $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x & u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1} & v'(x) = -\dfrac{1}{n!}(2-x)^n \end{cases}$ donc :

$\mathrm{I}_{n+1} = \left[\dfrac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}\mathrm{e}^x \right]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 -\frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+1} = 0 - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ soit pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. $\mathrm{I}_1 = \mathrm{e}^2 - 3$ donc $\mathrm{e}^2 = \mathrm{I}_1 + 3 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \mathrm{I}_1$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \mathrm{I}_n$ alors $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}$.

$\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n+1} + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ or $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \mathrm{I}_n$ donc en remplaçant I_n par $\mathrm{I}_{n+1} + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

alors : $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

5. *a.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} u_n$

$u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n = \dfrac{2}{n+1} u_n - \dfrac{1}{2} u_n = u_n\left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) = u_n \times \dfrac{4-(n+1)}{2(n+1)} = u_n \times \dfrac{3-n}{2(n+1)}$

pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a $3 - n \leq 0$ et $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

Ceci pouvait se démontrer plus simplement en remarquant que si $n \geq 3$ alors $n + 1 \geq 4$ donc $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{4}$

donc $0 < \dfrac{2}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$ or pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ donc $0 < \dfrac{2}{n+1} u_n \leq \dfrac{1}{2} u_n$ soit $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

b. Si $n = 3$, $u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = u_3$ donc $0 \leq u_3 \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$, la propriété est vérifiée pour $n = 3$.

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que : pour tout $n \geq 3$, si $0 \leq u_n \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1-3}$.

$$\boxed{\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \tfrac{1}{2} u_n \\ u_n &\leq u_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}} \text{ donc } \boxed{\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \tfrac{1}{2} u_n \\ \tfrac{1}{2} u_n &\leq \tfrac{1}{2} u_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}} \quad \text{donc } u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout $n \geq 3$.

6. Pour tout $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ or si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$

D'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(\mathrm{e}^2 - 1)$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq u_n(\mathrm{e}^2 - 1)$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = 0$

7. $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \mathrm{I}_n$ donc $1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{I}_n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^2$.