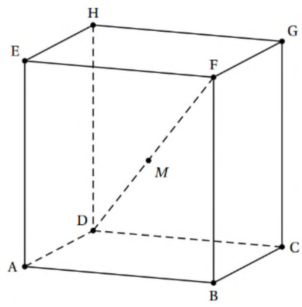
Liban juin 2017

Exercice 1 6 points **Commun à tous les candidats**

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.



Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$.

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF].

On a $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2. *a*. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x ; x ; x)$.

b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \rightarrow \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$.

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?

Exercice 2 6 points Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4}.

Les parties A, B, et C sont indépendantes

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).

a. Justifier que l'on peut choisir λ = 0,5 min.

b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance μ = 70 min et d'écart-type σ = 30 min.

1. *a*. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?

b. Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?

c. À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

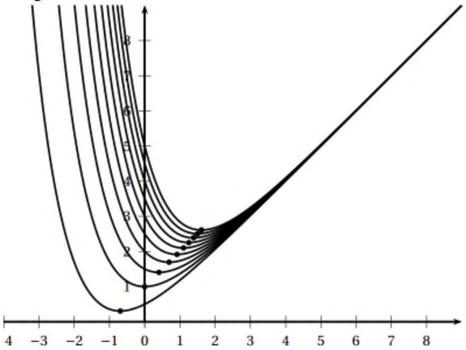
Exercice 3 3 points Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur R par :

$$f_k(x) = x + k\,e^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur R. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)	0,22	0,245	0,25									

1. *a*. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.

b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15}\, c$ où a_1, a_2, ..., a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Initialisation :  I prend la valeur 0
                  P prend la valeur 0
                  R prend la valeur 0
Traitement :      Pour k allant de 0 à 7 :
                  | R prend la valeur du reste de la division euclidienne de 2 a_{2k+1} par 9
                  | I prend la valeur I + R
                  Fin Pour
                  Pour k allant de 1 à 7 :
                  | P prend la valeur P + a_{2k}
                  Fin Pour
                  S prend la valeur I + P + c
Sortie :          Si S est un multiple de 10 alors :
                  | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
                  Sinon :
                  | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
                  Fin Si
```

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.

Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu 6a35 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.

Montrer qu'il existe une clé *c* rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

CORRECTION

Exercice 1 Commun à tous les candidats

Partie A

1. D a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0), F (1 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{DF}$ (1 ; 1 ; 1)

E a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1), B (1 ; 1 ; 0) et G (0 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{EB}$ (0 ; 1 ; – 1) et $\overrightarrow{EG}$ (– 1 ; 1 ; 0).

Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles donc ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG). Il est donc normal au plan (EBG).

2. Une équation du plan (EBG) est de la forme $x + y + z = d$

E appartient à ce plan donc $1 + 0 + 1 = d$ soit $d = 2$

Une équation du plan (EBG) est de la forme $x + y + z = 2$.

3. La droite (DF) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$ donc a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t \in$ R.

Le point I a des coordonnées de la forme (t ; t ; t) et appartient au plan (EBG) donc $t + t + t = 2$ soit $t = \frac{2}{3}$.

I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Partie B

1. Les côtés [ED], [DB] et [EB] du triangle EDB sont les diagonales de carrés de côté de longueur 1.

Le triangle EDB est donc équilatéral et tous ses angles mesurent $\frac{\pi}{3}$ radian.

Si le point M est confondu avec le point D alors l'angle $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle EFB est rectangle en F.

Si le point M est confondu avec le point F alors l'angle $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{2}$.

2. *a*. $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$ donc d'après la question 3. de la partie A, M a pour coordonnées (x ; x ; x).

b. $\overrightarrow{ME} . \overrightarrow{MB} = ME \times MB \cos\theta$

$\overrightarrow{ME}\,(1-x\,;-x\,;1-x)$ et $\overrightarrow{MB}\,(1-x\,;1-x\,;-x)$ donc $\overrightarrow{ME} . \overrightarrow{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x) = 3x^2 - 4x + 1$

$MB^2 = ME^2 = (1-x)^2 + x^2 + (1-x)^2 = 3x^2 - 4x + 2$ donc $MB \times ME = 3x^2 - 4x + 2$

$3x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 4x + 2)\cos\theta$ donc $\cos\theta = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

3. *a*. Le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $\widehat{EMB} = \dfrac{\pi}{2}$ soit si et seulement si $\cos\theta = 0$

La fonction f est continue, strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$, $f(0) > 0$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$. $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x = \dfrac{1}{3}$ sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$. Le point M est donc confondu avec le point J.

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;1\right]$, et $f(1) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x = 1$, sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;1\right]$. M est alors confondu avec F.

b. La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$ donc l'angle θ est maximal quand $\cos\theta$ est minimal.

La fonction f admet un minimum pour $x = \dfrac{2}{3}$ donc quand M est en confondu avec le point I.

Exercice 2 Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour déterminer une estimation de la durée moyenne d'attente on va utiliser le centre des classes.

$1 \times 75 + 3 \times 19 + 5 \times 10 + 7 \times 575 + 19 + 10 + 5 = 217$ donc une estimation de la durée moyenne d'attente est $\dfrac{217}{109}$ soit environ 1,9911 min. Une voiture à l'entrée du parking attend en moyenne environ 2 minutes.

2. *a*. $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\dfrac{1}{\lambda} = 2$ soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$ soit environ 0,5

b. $P(T \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321$.

c. T suit une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(T \geq 1)}(T \leq 2) = P(T \leq 1) = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}3935$.

Partie B

1. *a*. D'après l'énoncé $E(D) = 70$.

La durée moyenne de stationnement d'une voiture est donc de 70 minutes.

Les questions suivantes se font entièrement à la calculette.

b. $P(D \geq 120) \approx 0{,}0478$

c. $P(D \leq t) = 0{,}9 \Leftrightarrow t \approx 140$ soit environ 2 h 20 min.

2. Le gestionnaire veut que $E(D) = 5$

Durée	inférieure à 15 min	entre 15 min et 1 heure	entre 1 h et 2 heures	entre 2 h et 3 heures
Probabilité p	$P(D \leq 15) \approx 0{,}0334$	$P(15 \leq D \leq 60) \approx 0{,}3361$	$P(60 \leq D \leq 120) \approx 0{,}5828$	$P(120 \leq D \leq 180) \approx 0{,}0478$
Tarif en euros x	Gratuit	3,5	$3{,}5 + t$	$3{,}5 + 2t$
$p\,x$	0	$3{,}5 \times 0{,}3361$	$0{,}5828\,(3{,}5 + t)$	$0{,}0478\,(3{,}5 + 2t)$

$E(D) = 5 = 0 + 3{,}5 \times 0{,}3361 + 0{,}5828\,(3{,}5 + t) + 0{,}0478\,(3{,}5 + 2t)$

$0{,}6784\,t = 1{,}616\,55$ donc $t = \dfrac{1{,}61655}{0{,}6784}$ soit $t \approx 2{,}38$ €

L'heure supplémentaire est donc facturée 2,38 €.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes donc $\mu' = 30$

Soit $Z = \dfrac{T' - \mu'}{\sigma'}$. Z suit une loi normale centrée réduite.

75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes donc $P(T' \leq 37) = 0{,}75$

$P\left(Z \leq \dfrac{37-30}{\sigma'}\right) = 0{,}75$ soit $P\left(Z \leq \dfrac{7}{\sigma'}\right)$ donc en utilisant la calculette $\dfrac{7}{\sigma'} = 0{,}6745$ donc $\sigma' = \dfrac{7}{0{,}6745} \approx 10{,}38$.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes.
$P(10 \leq T \leq 50) = 0{,}946$. Cet objectif n'est pas atteint.

Exercice 3 3 points Commun à tous les candidats

La fonction f_k est dérivable sur R en tant que somme de fonctions dérivables sur R et $f'_k(x) = 1 - k\,e^{-x}$

$1 - k\,e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow e^{x} > k \Leftrightarrow x > \ln k$

A_k a donc pour coordonnées $(\ln k\,;\, \ln k + 1)$ donc A_k appartient à la droite d'équation $y = x + 1$.
Les points A_k sont alignés.

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

1. $0 < x < 1$ donc $1 - x > 0$ donc $f(x) = 30\,[\ln 20 + \ln x - \ln(1 - x)]$

La fonction f est dérivable sur] 0 ; 1 [en tant que somme de fonctions dérivables sur] 0 ; 1 [.

$f'(x) = 30\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{-1}{1-x}\right) = 30\left(\dfrac{1-x+x}{x\,(1-x)}\right) = \dfrac{30}{x\,(1-x)}$ donc $f'(x) > 0$ sur] 0 ; 1 [.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle] 0 ; 1 [.

2. $20 \leq f(x) \leq 120 \Leftrightarrow 20 \leq 30\ln\left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \leq 120 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \leq \ln\left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \leq 4 \Leftrightarrow \quad e^{\frac{2}{3}} \leq \left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \leq e^{4}$

Dissocions les inégalités : $1 - x > 0$ donc $\left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \leq e^{4} \Leftrightarrow 20\,x \leq e^{4}(1-x) \Leftrightarrow (20 + e^{4})\,x \leq e^{4} \Leftrightarrow \; x \leq \dfrac{e^{4}}{20 + e^{4}}$

$e^{\frac{2}{3}} \leq \left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \; e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leq 20\,x \Leftrightarrow \; e^{\frac{2}{3}} \leq (20 + \; e^{\frac{2}{3}}\;)\,x \Leftrightarrow \; \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leq x$.

donc $e^{\frac{2}{3}} \leq \left(\dfrac{20\,x}{1-x}\right) \leq e^{4} \Leftrightarrow \; \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leq x \leq \dfrac{e^{4}}{20 + e^{4}}$ soit en arrondissant au centimètre près : $0{,}09 \leq x \leq 0{,}73$

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle] 0 ; 1 [, donc le diamètre doit être compris entre 0,08 mètre et 0,73 mètre pour que ce modèle.

Partie B

1\. *a*. La vitesse de croissance de l'arbre est de 0,25 mètres par année.

b. On a entré dans la cellule C3 la formule = (C2 – B2) / (C1 – B1).

2\. Déterminons l'âge d'un arbre de diamètre 0,27 cm. $f(0{,}27) = 30\ln\left(\dfrac{20 \times 0{,}27}{1 - -0{,}27}\right) \approx 60$ ans.

Sur la période allant de 50 ans à 70 ans l'arbre a grandi de 0,22 mètre par an.
A 60 ans, il mesure donc 11,2 + 10 × 0,22 = 13,4 mètres.

3\. *a*. La vitesse de croissance est maximale entre 85 et 95 ans

Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
Vitesse de croissance	0,22	0,245	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

b. Si le diamètre des arbres mesure environ 70 cm alors leur âge est de $f(0{,}7)$ soit environ 115 ans ce qui est en dehors de l'intervalle] 85 ; 95 [donc l'indication est fausse.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1\. *a*.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2\,a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

b. D'après le numéro de carte $c = 1$

a_{2k}	6	5	0	2	5	1	4
P	6	11	11	13	18	19	23

S = I + P + c = 26 + 23 + 1 = 50 donc S est un multiple de 10 donc le numéro de carte est correct.

c.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	6	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	12	6	8	0	18	12	6	2
R	3	6	8	0	0	3	6	2
I	3	9	17	17	17	20	26	28

Puisqu'on a remplacé 6 par a alors P = 23 – 6 + a = 17 + a
S = I + P + c = 28 + 17 + a + 1 = 46 + a
$0 \leq a \leq 9$ donc $46 \leq 46 + a \leq 54$ donc I est un multiple de 10 si 46 + a = 50 soit a = 4.

2. Le numéro étant connu, on connait I et P
Existence : soit r le reste de la division de I + P par 10, $I + P + c \equiv 0\ [10] \Leftrightarrow r + c \equiv 0\ [10] \Leftrightarrow c \equiv 10 - r\ [10]$
$0 \leq c \leq 9$ donc $c = 10 - r$. Il existe donc bien une valeur de c rendant ce numéro correct.

Unicité : Supposons qu'il existe deux valeurs c et c' rendant ce numéro correct.
$I + P + c \equiv I + P + c'\ [10] \Leftrightarrow c \equiv c'\ [10]$ or $0 \leq c \leq 9$ et $0 \leq c' \leq 9$ donc $-9 \leq c - c' \leq 9$
Le seul multiple de 10 compris entre – 9 et 9 est 0 donc c = c', c est donc unique

3. On calcule I, P et S pour des numéros de la forme : nnnn nnnn nnnn nnn n, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_{2k+1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2a_{2k+1}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
I = 8∗R	0	16	32	48	64	8	24	40	56	0
a_{2k}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P = 7∗n	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
S = I + P + c	0	24	48	72	96	48	72	96	120	72

S est un multiple de 10 si et seulement n = 0 ou n = 8
Les seuls numéros possibles de ce type sont : 0000 0000 0000 000 0 et 8888 8888 8888 888 8

4. Essayons avec le numéro de la question (1.) soit : 5635 4002 956 1 341 1
On a montré que ce numéro était correct.

• Première tentative.

On peut échanger par exemple a_{12} = 1 et a_{13} = 3, on obtient le numéro : 5635 4002 956 **3 1** 41 1
Pour calculer I avec le numéro 5635 4002 956 **3 1** 41 1 : on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	1	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	2	2
R	1	6	8	0	0	3	2	2
I	1	7	15	15	15	18	20	22

Pour calculer P avec le numéro 5635 4002 956 3 1 41 1 : on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	3	4
P	6	11	11	13	18	21	25

La valeur de S est donc : S = I + P + c = 48

• Deuxième tentative.

On peut échanger par exemple a_{12} = 1 et a_{11} = 6, on obtient le numéro : 5635 4002 95 **1 6** 341 1
Pour calculer I avec le numéro 5635 4002 95 1 6 341 1 : on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	1	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	2	6	2
R	1	6	8	0	0	2	6	2
I	1	7	15	15	15	17	23	25

Pour calculer P avec le numéro 5635 4002 95**1 6** 341 1 : on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	6	4
P	6	11	11	13	18	24	28

La valeur de S est donc : S = I + P + c = 54

• Conclusion :

On a échangé des chiffres consécutifs distincts dont l'un des deux est 1 et les résultats sont différents.
On ne peut pas à priori déterminer l'autre chiffre.