Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.
La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ) avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

CORRECTION

$p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

$p(X > t) = 1 - p(X \le t) = e^{-\lambda t}$

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

$p(X > 10) = e^{-10\lambda} = 0,286 \Leftrightarrow -10\lambda = \ln 0,286 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0,286}{10} \approx 0,125$

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

$p(X \le 6) = 1 - e^{-6\lambda} = 1 - e^{-0,75} \approx 0,528$

3. $p_{(X > 8)}(X > 10) = \dfrac{p((X > 8) \cap (X > 10))}{p(X > 8)}$

$p_{(X > 8)}(X > 10) = \dfrac{p((X > 10))}{p(X > 8)} = \dfrac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-10\lambda + 8\lambda}$

$p_{(X > 8)}(X > 10) = e^{-2\lambda} = e^{-0,25} \approx 0,779$

4. L'événement « au moins un oscilloscope a une durée de vie supérieure à 10 ans » est l'événement contraire de « les 15 oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans »
La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 10 ans est $1 - 0,779 = 0,221$
donc la probabilité de l'événement « les 15 oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans » est $0,221^{15}$
donc l'événement contraire a une probabilité : $p = 1 - 0,221^{15}$

5. En reprenant le même raisonnement avec n oscilloscopes, $p = 1 - 0,221^n$
on veut que $p \ge 0,999$
donc $1 - 0,221^n \ge 0,999 \Leftrightarrow 0,221^n \le 1 - 0,999$
$\Leftrightarrow n \ln 0,221 \le \ln 0,001 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,221}$

$\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,221} \approx 4,58$

Il faut donc acheter au moins 5 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999.