**Centres étrangers juin 2007**

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point* .

*Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point.*

*L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à* 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

**1.** On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

**a.** La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A $\frac{1}{56}$ B $\frac{1}{120}$ C $\frac{1}{3}$

**b.** La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A $\frac{11}{56}$ B $\frac{11}{120}$ C $\frac{16}{24}$

**2.** On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

**a.** La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2$ B $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

**b.** La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$ B $2\times\left(\frac{5}{8}\right)+3\times\left(\frac{3}{8}\right)$ C $10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

**3.** On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

– $R_1$ l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;

– $N_1$ l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;

– $R_2$ l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;

– $N_2$ l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

**a.** La probabilité conditionnelle $P_{R1}(R_2)$ est :

A $\frac{5}{8}$ B $\frac{4}{7}$ C $\frac{5}{14}$

**b.** La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A $\frac{16}{49}$ B $\frac{15}{64}$ C $\frac{15}{56}$

**c.** La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A $\frac{5}{8}$ B $\frac{5}{7}$ C $\frac{3}{28}$

**d.** La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A $\frac{15}{56}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{5}{7}$

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**I. Restitution organisée de connaissances**

**1.** Démontrer qu'un nombre complexe $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

**2.** Démontrer qu'un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$

**3.** Démontrer que pour tout nombre complexe $z$, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a$, $b$, $c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

**II. Étude d'un cas particulier**

On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

**1.** Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

**2.** Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

**III. Étude du cas général.**

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et $a$, $b$, $c$ sont les affixes respectives des points A, B, C.

**1.** Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$.

**1.** On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

***a.*** En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que $w$ est imaginaire pur.

***b.*** Vérifier l'égalité : $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = w$

et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$

***c.*** En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

**2.** Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

***a.*** Exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

***b.*** Prouver que $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k$ est un entier relatif quelconque. (On admet de même que $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{BH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

***c.*** Que représente le point H pour le triangle ABC ?

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte $f$ d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}\,\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2$, et d'en donner deux décompositions.

**I. Restitution organisée de connaissances**

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où $a$ et $b$ sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de $a$ et de $b$ l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

**II. Première décomposition de *f***

Soit $g$ la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$.

**1.** Préciser les éléments caractéristiques de $g$ (centre, rapport, angle).

**2.** Déterminer une réflexion $s$ telle que $f = g \circ s$,

**III. Deuxième décomposition de *f***

**1.** Montrer que $f$ admet un unique point invariant noté $\Omega$. Déterminer l'affixe $\omega$ de $\Omega$.

**2.** Soit D la droite d'équation : $y = x + 2$.
Montrer que pour tout point N appartenant à D, le point $f$(N) appartient aussi à D.

**3.** Soit $\sigma$ la réflexion d'axe D et $k$ la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

***a.*** Donner l'écriture complexe de $\sigma$.

(Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par $\sigma$ pour déterminer les nombres complexes $a$ et $b$.)

***b.*** En déduire que l'écriture complexe de $k$ est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

***c.*** Donner la nature de la transformation $k$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**4.** Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte $f$ comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

**EXERCICE 3 4 points      Commun à tous les candidats**

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f$ et $f'$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I.

On note M un point de C d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par T la tangente à la courbe C au point $M$.
On rappelle qu'une équation de T est de la forme : $Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

**I. Question préliminaire**

**1.** Montrer que T coupe l'axe des abscisses en un point $H$ dont l'abscisse $X_T$ vérifie : $X_T = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

**2.** Montrer que T coupe l'axe des ordonnées en un point $K$ dont l'ordonnée $Y_T$ vérifie : $Y_T = -f'(x)\,x + f(x)$

**II.** $k$ désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions $f$ pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante, et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$. (Propriété 1)

**1.** Démontrer que $f$ vérifie la propriété 1 si et seulement si $f$ vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1}{k}y$

**2.** En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction $f$ de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

**III.** $k$ désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions $f$ pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $I = ]0 ; +\infty[$. (Propriété 2)

**1.** Démontrer que $f$ vérifie la condition posée si et seulement si $f$ vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{k}{x}$.

**2.** En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction $f$ de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 1$.

**EXERCICE 4 7 points**
**Commun à tous les candidats**

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

**I. Existence et unicité de la solution**

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

**1.** Démonter que $x$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
**2.** Étude du signe de la fonction $f$
***a.*** Étudier le sens de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
***b.*** En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$.
***c.*** Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
***d.*** Étudier le signe de $f$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

**II. Deuxième approche**

On note $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

**1.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
**2.** En déduire que $\alpha$ est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
**3.** Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

**III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite $\alpha$**

On considéra la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = g(u_n)$
**1.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
**2.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
**3.** Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de $\ell$.
**4.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $u_4$ arrondie à la sixième décimale.

## CORRECTION

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

**1.** On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne donc le nombre de cas possibles est $\binom{8}{3} = 56$

***a.*** Il existe 3 boules noires donc le nombre de cas favorables est 1, donc la probabilité de tirer 3 boules noires est : $\frac{1}{56}$

***b.*** Il existe 5 boules rouges donc le nombre de tirages de 3 boules rouges est $\binom{5}{3} = 10$, donc la probabilité de tirer 3 boules rouges est : $\frac{10}{56}$.

La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est : $\frac{10}{56} + \frac{1}{56} = \frac{11}{56}$

**2.** On *a* une succession de 5 tirages identiques et indépendants, chaque tirage *a* deux issues :

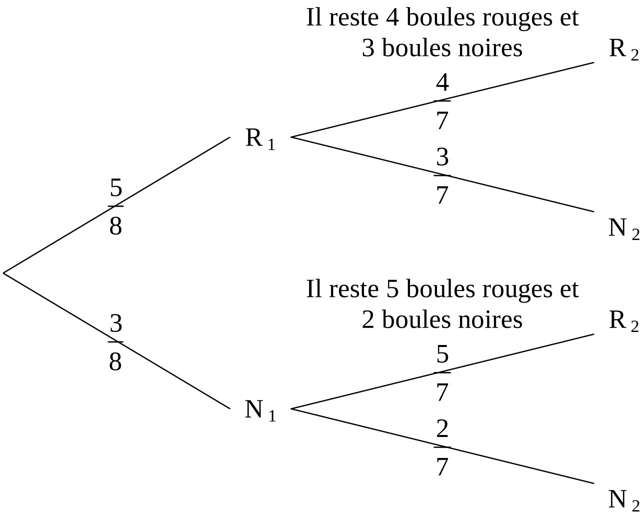
la boule est noire ($p = \frac{3}{8}$)

la boule n'est pas noire ($q = \frac{5}{8}$) donc la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires suit une loi binomiale de paramètres $\left(5\,;\frac{3}{8}\right)$. $p(\text{X} = k) = \binom{5}{k} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{k} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{5-k}$

***a.*** La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est : $p(\text{X} = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)^{5}$

***b.*** La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est : $p(\text{X} = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{3} = 10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{2}$

**3.**




***a.*** $P_{\text{R}_1}(\text{R}_2) = \frac{4}{7}$

***b.*** La probabilité de l'évènement $\text{R}_1 \cap \text{N}_2$ est : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

***c.*** La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

$P(\text{R}_1 \cap \text{R}_2) + \text{P}(\text{N}_1 \cap \text{R}_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

***d.*** $P(\text{R}_2) = \frac{5}{7}$ donc $P(\text{N}_2) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

$$P_{\text{N}_2}(\text{R}_1) = \frac{P(\text{R}_1 + \text{N}_2)}{P(\text{N}_2)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$$

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**I. Restitution organisée de connaissances**

**1.** Soit $z$ un nombre complexe, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $z = x + \mathrm{i}\, y$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - \mathrm{i}\, y = -(x + \mathrm{i}\, y) \Leftrightarrow 2\,x = 0 \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

**2.** $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - \mathrm{i}\, y = x + \mathrm{i}\, y \Leftrightarrow 2\,\mathrm{i}\, y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ est réel

**3.** $|\,z\,|^2 = x^2 + y^2$ or $z\,\overline{z} = (x + \mathrm{i}\, y)\,(x - \mathrm{i}\, y) = x^2 - (\mathrm{i}\, y)^2$ donc $z\,\overline{z} = x^2 + y^2 = |\,z\,|^2$.

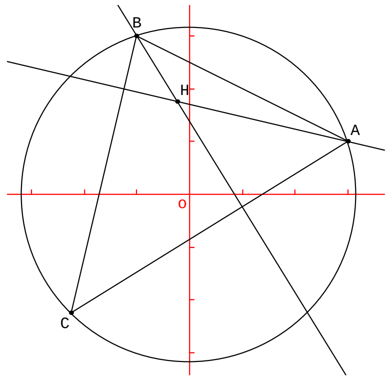
**II. Étude d'un cas particulier**

**1.** OA $= |\,a\,| = \sqrt{10}$ et OB $= |\,b\,| = \sqrt{10}$ et OC $= |\,c\,| = \sqrt{10}$ donc OA = OB = OC

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

**2.** On vérifie que (AH) et (BH) sont deux hauteurs du triangle ABC donc que H est l'orthocentre de ce triangle.

**III. Étude du cas général.**




**1.** O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC $\Leftrightarrow$ OA = OB = OC

$\Leftrightarrow$ OA$^2$ = OB$^2$ = BC$^2$ $\Leftrightarrow |\,a\,|^2 = |\,b\,|^2 = |\,c\,|^2 \Leftrightarrow a\,\overline{a} = b\,\overline{b} = c\,\overline{c}$.

**2. *a.*** $w = \overline{b}\,c - b\,\overline{c}$ donc $\overline{w} = \overline{\overline{b}\,c - b\,\overline{c}}$ or $\overline{\overline{z}} = z$ donc $\overline{w} = \overline{\overline{b}\,c - b\,\overline{c}} = b\,\overline{c} - \overline{b}\,c = -w$

$\overline{w} = -w$ donc $w$ est imaginaire pur.

***b.*** $(b + c)\,(\overline{b} - \overline{c}) = b\,\overline{b} - b\,\overline{c} + c\,\overline{b} - c\,\overline{c}$

or $b\,\overline{b} = c\,\overline{c}$ donc $(b + c)\,(\overline{b} - \overline{c}) = -b\,\overline{c} + c\,\overline{b} = w$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\ (\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)\,(\overline{b}-\overline{c})} = \frac{w}{|\,b-c\,|^2}$$

**3. *a.*** $Z_{\overrightarrow{\text{AH}}} = a + b + c - a = b + c$ et $Z_{\overrightarrow{\text{CB}}} = b - c$

***b.*** $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{AH}}}}{Z_{\overrightarrow{\text{CB}}}} = \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|\,b-c\,|^2}$ or $|\,b - c\,|^2 = \text{BC}^2$ est un réel et d'autre part $w$ est un imaginaire pur non nul donc $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{AH}}}}{Z_{\overrightarrow{\text{CB}}}}$ est un imaginaire pur non nul alors $\arg \dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{AH}}}}{Z_{\overrightarrow{\text{CB}}}} = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $(\overrightarrow{\text{CB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AH}}) = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, où $k$ est un entier relatif quelconque.

***c.*** (AH) est une droite perpendiculaire au côté (BC) du triangle ABC passant par le sommet A donc est une hauteur de ce triangle, de même pour (CH)

H est le point d'intersection de ces deux hauteurs donc est l'orthocentre du triangle ABC.

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**I. Restitution organisée de connaissances**

Si M($z$) est invariant par la similitude d'expression complexe $z' = a\,z + b$, où $a$ et $b$ sont des nombres complexes avec $a \neq 1$ alors $z = a\,z + b$, et donc $(1 - a)\,z = b$, $a \neq 1$ donc $z = \dfrac{b}{1-a}$.

$s$ admet donc un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

**II. Première décomposition de *f***

**1.** $g$ a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ ($a \neq 1$) donc $g$ est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{-2+2\,\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ soit $\omega = 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

$a = 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc le rapport de $g$ est $|\,a\,| = 2\sqrt{2}$, l'angle de $g$ est $\arg a = \dfrac{\pi}{2}$.

**2.** Soit la réflexion d'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{u})$, l'écriture complexe de $s$ est $z' = \overline{z}$ donc $f = g \circ s$.

**Ill. Deuxième décomposition de *f***

**1.** Montrer que $f$ admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe $\omega$ de Ω.

$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\overline{z} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x + \mathrm{i}\,y = \mathrm{i}\sqrt{2}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\,y - 2) + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = 2\,y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$ et $x = 0 \Leftrightarrow$ le point Ω(− 2) est l'unique point invariant par $f$.

**2.** Soit N ∈ D N a pour affixe $(x + \mathrm{i}(x + 2))$ donc $f$(N) a pour affixe $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,(x - \mathrm{i}\,(x + 2)) + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$

soit $z' = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 + \mathrm{i}\,[\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}]$ donc $x' = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} - 2$ et $y' = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}$

$x' + 2 = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} = y'$ donc $f$(N) ∈ D.

**3. *a.*** σ est une réflexion d'axe D donc l'écriture complexe de σ est de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$

Soit A le point d'affixe 2 i et B celui d'affixe – 2, A et B sont deux points distincts de D donc σ(A) = A et σ(B) = B

donc $\begin{cases} 2\,\mathrm{i} = -2\,\mathrm{i}\,a + b \\ -2 = -2\,a + b \end{cases}$, par différence membre à membre, $2\,\mathrm{i} + 2 = a\,(2 - 2\,\mathrm{i})$ donc $a = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$,

En remplaçant $a$ par i dans $-2 = -2\,a + b$, $b = -2 + 2\,\mathrm{i}$

l'écriture complexe de σ est de la forme $z' = \mathrm{i}\,\overline{z} - 2 + 2\,\mathrm{i}$.

***b.*** $k = f \circ \sigma$ donc l'écriture complexe de $k$ est : $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,[\,\overline{\mathrm{i}\,\overline{z} - 2 + 2\,\mathrm{i}}\,] + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 = \mathrm{i}\sqrt{2}\,[-\mathrm{i}\,z - 2 - 2\,\mathrm{i}\,] + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$

donc $z' = \sqrt{2}\,z - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i} + 2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$ soit l'écriture complexe de $k$ est $z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$.

***c.*** l'écriture complexe de $k$ est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $k$ réel non nul donc $k$ est une homothétie de rapport $a = \sqrt{2}$

le centre de l'homothétie $k$ est le point invariant par $k$, $z' = z \Leftrightarrow z = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} = -2$ on trouve $z' = -2$ donc $k$(Ω) = Ω,

$k$ est une homothétie de centre Ω.de rapport $\sqrt{2}$.

**4.** σ o σ = Id et $k = f$ o σ donc $f = k$ o σ.

**EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats**

**I. Question préliminaire**

**1.** Une équation de T est de la forme : $Y = f'(x)\ [X - x] + f(x)$ donc T coupe l'axe des abscisses en un point $H$ dont l'ordonnées $Y_H = 0$ donc l'abscisse $X_H$ vérifie : $f'(x)\ [X_H - x] + f(x) = 0$ soit $X_H = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

**2.** Une équation de T est de la forme : $Y = f'(x)\ [X - x] + f(x)$ donc T coupe l'axe des ordonnées en un point $K$ dont l'abscisse $X_K = 0$ donc l'ordonnée $Y_K$ vérifie : $Y_K = f'(x)\ [0 - x] + f(x) = 0$ soit $Y_K$ vérifie : $Y_K = -f'(x)\ x + f(x)$

**II.**

**1.** $f$ vérifie la propriété 1 $\Leftrightarrow$ la différence $x - X_T$ est constante, et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$

$\Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, $x - \left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right) = k \Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = k$

$\Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \dfrac{1}{k} f(x) \Leftrightarrow f$ vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1}{k} y$

**2.** Les fonctions vérifiant la propriété 1 sont donc de la forme $f(x) = \mathrm{C}\,e^{\frac{1}{k}x}$ où C est une constante réelle.

Pour $k = \dfrac{1}{2}$, $f(x) = \mathrm{C}\,e^{2x}$, de plus $f(0) = 1$ donc C = 1. La fonction $f$ de cette famille telle que : $f(0) = 1$ est définie par $f(x) = e^{2x}$.

**III.** $k$ désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions $f$ pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle I = ]0 ; + ∞ [. (Propriété 2)

**1.** $f$ vérifie la propriété 2 $\Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, la différence $f(x) - Y_T$ est constante, et égale à $k$

$\Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, $f(x) - [-f'(x)\ x + f(x)] = k \Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$,

$\Leftrightarrow$ pour tout nombre réel $x$, $x\,f'(x) = k \Leftrightarrow f$ vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{k}{x}$.

**2.** $f$ vérifie la propriété 2 $\Leftrightarrow$ pour tout $x$ de I, $f$ vérifie l'équation différentielle : $y' = \dfrac{k}{x}$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x$ de I, $f$ est une primitive de la fonction $x \to \dfrac{k}{x}$

$\Leftrightarrow$ il existe un constante réelle C telle que, pour tout $x$ de I, $f(x) = k \ln x + \mathrm{C}$

Pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction $f$ de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 1$ est telle que $k \ln 1 + \mathrm{C} = 1$ donc C = 1

donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln x + 1$

**EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats**

**I. Existence et unicité de la solution**

**1.** $x$ est solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow e^{x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x}} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

**2. *a*.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^{-x}$ or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$

$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2. *b*.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f$ est définie continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $0 \in f(\mathbb{R})$ donc l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$.

**2. *c*.** $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0{,}56) < 0$ et $f(0{,}57) > 0$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$

**2. *d*.** $f$ est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et $f(\alpha) = 0$ donc si $0 \le x < \alpha$ alors $f(x) < 0$ ; si $\alpha < x \le 1$ alors $f(x) > 0$ et $f(\alpha) = 0$

**II. Deuxième approche**

**1.** $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^{x}} = x \Leftrightarrow 1 + x = x + x\,e^{x} \Leftrightarrow 1 = x\,e^{x} \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

**2.** Résoudre $g(x) = x$ est équivalent à résoudre $f(x) = 0$ or cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}$, donc $\alpha$ est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

**3.** $g'(x) = \dfrac{1+e^{x} - (1+x)\,e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} = \dfrac{1 - x\,e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} = -e^{x}\dfrac{e^{-x} - x}{(1+e^{x})^{2}} = -e^{x}\dfrac{f(x)}{(1+e^{x})^{2}}$.

si $0 \le x < \alpha$ alors $f(x) < 0$ donc $g'(x) > 0$ donc $g$ est strictement croissante sur $[0 ; \alpha]$

si $\alpha < x \le 1$ alors $f(x) > 0$ donc $g'(x) < 0$ donc $g$ est strictement décroissante sur $[\alpha ; 1]$.

**III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite *$\alpha$***

**1.** Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

$u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{1}{2}$ or $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$ donc $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Montrons qu'elle est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, si $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ alors $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$.

$g$ est strictement croissante sur $[0 ; \alpha]$ donc si $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ alors $g(0) \le g(u_n) \le g(u_{n+1}) \le g(\alpha)$

or pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = g(u_n)$ ; $g(0) = \dfrac{1}{2}$ et $g(\alpha) = \alpha$ donc $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$ donc $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**2.** La suite $(u_n)$ est croissante majorée par $\alpha$ donc est convergente. On note $\ell$ sa limite alors $u_0 \le \ell \le \alpha$.

**3.** Pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = g(u_n)$ ; la fonction $g$ est continue sur $[0 ; \alpha]$ et pour tout entier naturel $n$, $u_n \in [0 ; \alpha]$, la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ donc $\ell$ est solution de $g(x) = x$ donc vérifie $g(\ell) = \ell$.

D'après la question 2. de la Partie II, l'équation $g(x) = x$ admet pour seule solution $\alpha$ donc $\ell = \alpha$.

**4.** $u_4 \approx 0{,}567143$

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,5 |
| 2 | 0,566311 |
| 3 | 0,567143 |
| 4 | 0,567143 |