Asie Juin 2003

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 2(1 + i)z$.

On pose $z = x + i y$ et $z' = x' + i y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathcal{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la fonction h n'est pas demandée). $\mathcal{H}$ est tracée sur le graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1 + i)$ appartient à Γ et H.

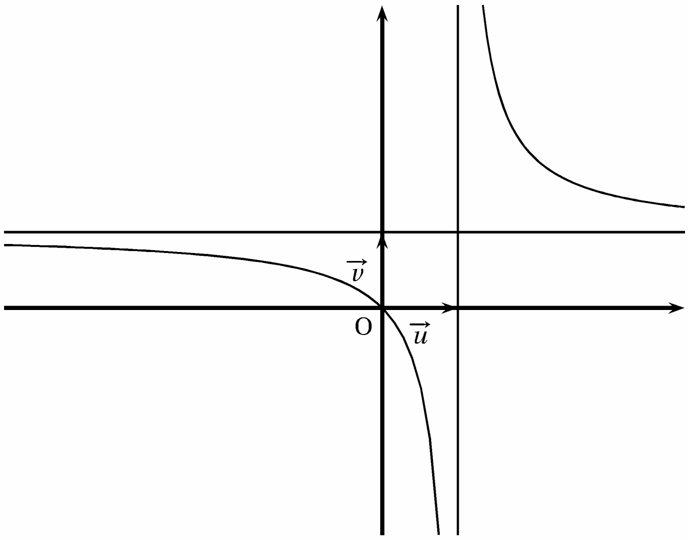
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et $\mathcal{H}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



CORRECTION

1. *a*. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$x' + i y' = (x + i y)^2 - 2(1 + i)(x + i y) = x^2 - y^2 + 2 i x y - 2(x + i y + i x - y)$

donc $x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ et $y' = 2xy - 2x - 2y$

***b*.** z' est réel si et seulement si $y' = 0$ soit $2xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) = x \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{x-1}$

h est donc la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$

2. A est le point de coordonnées (2 ; 2) on vérifie que $h(2) = 2$ donc $A \in H$

On pouvait aussi calculer $a' = [2(1 + i)]^2 - 2(1 + i)\,2(1 + i) = 0$

a' est réel donc $A \in H$

3. *a*. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

R est la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

R(A) = B et R(C) = A donc $b = e^{i\frac{2\pi}{3}} a$ et $a = e^{i\frac{2\pi}{3}} c$

donc en remplaçant : $b = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} c$ donc $e^{i\frac{2\pi}{3}} b = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 c = c$ puisque $e^{2i\pi} = 1$ donc R(B) = C

Pour que deux triangles ABC et A'B'C' soient isométriques, il suffit de démontrer par exemple que leurs côtés sont deux à deux égaux : AB = A'B' et AC = A'C' et BC = B'C'

Par la rotation R :

$A \to B$

$B \to C$

$C \to A$

$O \to O$

Une rotation conserve les longueurs donc comme :

R transforme : A en B et O en O donc OA = OB
R transforme : A en B et B en C donc AB = BC
R transforme : B en C et O en O donc OB = OC
donc les triangles OAB et OBC sont isométriques.

R transforme : C en A et O en O donc OC = OA
R transforme : A en B et C en A donc AC = AB
R transforme : B en C et O en O donc OB = OC
donc les triangles OAB et OCA sont isométriques.

b. Par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$, A est transformé en B, B en C et C en A donc ABC est un triangle équilatéral de centre O

c. ABC est un triangle équilatéral de centre O donc OA = OB = OC
$|a| = |2(1+i)| = 2\sqrt{2}$, donc B et C appartiennent à Γ.

B a pour affixe $b = e^{i\frac{2\pi}{3}} a$ donc $b = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) 2(1+i) = (-1 + i\sqrt{3})(1+i)$ donc $b = -1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$

donc B a pour coordonnées $(-1 - \sqrt{3}\ ; -1 + \sqrt{3})$

$h(-1-\sqrt{3}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}-1} = \frac{(-1-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}$

$h(-1-\sqrt{3}) = \frac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{4-3}$ donc $h(-1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$ donc B ∈ $\mathcal{H}$

C a pour affixe $c = e^{-i\frac{2\pi}{3}} a$ donc $c = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) 2(1+i) = (-1 - i\sqrt{3})(1+i)$

$c = -1 + \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})$ donc C a pour coordonnées $(-1 + \sqrt{3}\ ; -1 - \sqrt{3})$

$h(-1+\sqrt{3}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}-1} = \frac{(-1+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}{(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}$

$h(-1+\sqrt{3}) = \frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}{4-3}$ donc $h(-1+\sqrt{3}) = -1-\sqrt{3}$ donc C ∈ $\mathcal{H}$

d.