Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas pris en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère :

- les points A(12 ; 0 ; 0), B(0 ; – 15 ; 0), C(0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; – 6), E (7 ; 3 ; – 3)
- le plan **P** d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$.

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à **P** et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan **P** ont au moins un point commun.

Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

CORRECTION

Affirmation 1 : Fausse
Le plan **P** a pour vecteur normal $\vec{n}$ (2 ; 1 ; – 2). Le plan d'équation $2x + y + 2z - 24 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}$ (2 ; 1 ; 2).
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les deux plans ne sont pas parallèles.
<u>Pour information :</u> Le plan **P**' parallèle à **P** passant par A a pour équation $2(x - x_A) + (y - y_A) - 2(z - z_A) = 0$
soit $2x + y - 2z - 24 = 0$.

Affirmation 2 : Fausse

Cherchons si A appartient à la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ soit cherchons s'il existe t tel que

$\begin{cases} x = 9 - 3t = 12 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} 9 - 3t = 12 \\ 5 + 5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$ donc $A \in \Delta$

Cherchons si C appartient à la droite Δ soit cherchons s'il existe t tel que $\begin{cases} x = 9 - 3t = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} 9 - 3t = 0 \\ 5 + 5t = 20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$ donc $C \in \Delta$

$A \neq C$ donc $\Delta = (AC)$.

Affirmation 3 Fausse

$\overrightarrow{DE}$ (5 ; – 4 ; 3) donc la droite (DE) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 7 - 4t \\ z = -6 + 3t \end{cases}$

Cherchons les points d'intersection de (DE) et de **P**.
$2x + y - 2z - 5 = 2(2 + 5t) + 7 - 4t - 2(-6 + 3t) - 5 = 0$
$4 + 10t + 7 - 4t + 12 - 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18 = 0$ donc (DE) et **P** n'ont pas de point d'intersection, (DE) est strictement parallèle à **P**

Affirmation 4 : Vraie
Il est admis implicitement (le texte parle du plan (ABC)) que les points A, B, C ne sont pas alignés.
$\overrightarrow{DE}$ (5 ; – 4 ; 3) est un vecteur directeur de la droite (DE).
$\overrightarrow{AB}$ (– 12 ; – 15 ; 0) et $\overrightarrow{AC}$ (– 12 ; 0 ; 20)
$\overrightarrow{DE} . \overrightarrow{AB} = 5 \times (-12) - 4 \times (-15) = 0$ donc (DE) est orthogonale à (AB)
$\overrightarrow{DE} . \overrightarrow{AC} = 5 \times (-12) + 3 \times 20 = 0$ donc (DE) est orthogonale à (AC).
(DE) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AC) du plan (ABC) donc (DE) est orthogonale au plan (ABC).