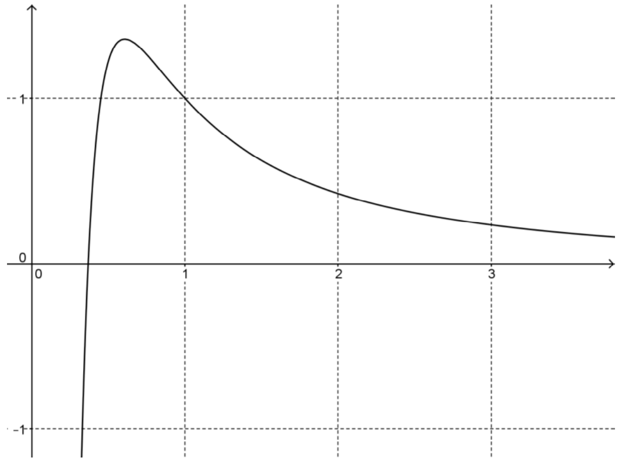
Soit f la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :



1. *a*. Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en + ∞.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. *a*. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. *a*. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de I_n en + ∞. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

CORRECTION

1. *a*. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}(1 + \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

***b*.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

***c*.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe C admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$ et en + ∞, la droite d'équation $y = 0$.

2. *a*. Soit $\begin{cases} u(x) = 1 + \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur] 0 ; + ∞ [donc f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et

donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \dfrac{x(-1 - 2\ln x)}{x^4}$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

***b*.** Sur] 0 ; + ∞ [: $-1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-0,5}$.

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle] 0 ; $e^{-0,5}$ [et $f'(x) \geq 0$ sur [$e^{-0,5}$; + ∞ [.

c. $\ln e^{-0,5} = -0,5$ donc $1 + \ln e^{-0,5} = 0,5$ et $(e^{-0,5})^2 = e^{-1}$ donc $f(e^{-0,5}) = \dfrac{e}{2}$

x	0		$e^{-0,5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{e}{2}$	$\searrow$	0

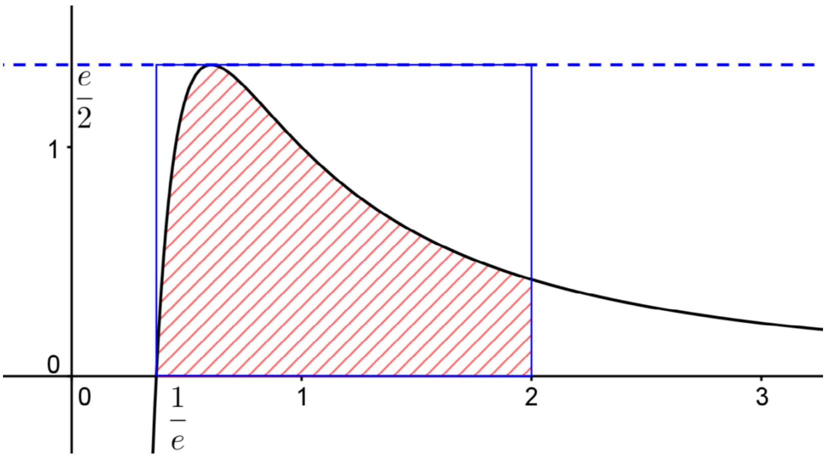
3. *a.* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, de coordonnées $(e^{-1} ; 0)$
b. f est strictement décroissante sur $[\, e^{-1} ; +\infty\, [$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[\, e^{-1} ; +\infty\, [$

f est strictement croissante $]\, 0 ; e^{-0,5}\, [$ et $f(e^{-1}) = 0$ donc :
sur $]\, 0 ; e^{-1}\, [$, $f(x) < 0$
$f(e^{-1}) = 0$
sur $]\, e^{-1} ; +\infty\, [$, $f(x) > 0$
4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a. I_2 est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 2$ (aire hachurée). Cette aire est inférieure à celle du rectangle bleu.

La longueur de ce rectangle est $2 - \dfrac{1}{e}$, sa largeur est égale au maximum de f donc à $\dfrac{e}{2}$ donc $I_2 \leq \dfrac{e}{2} \times \left(2 - \dfrac{1}{e} \right)$ soit $I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.

Une aire est positive donc $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.



b. La fonction f est positive sur$]\, e^{-1} ; +\infty\, [$, donc $I_n = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{n} f(x)\,dx$

$I_n = F(n) - F(e^{-1}) = \dfrac{-2 - \ln n}{n} - \dfrac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}}$

$\dfrac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}} = \dfrac{-2 - (-1)}{e^{-1}} = -e$ donc $I_n = \dfrac{-2 - \ln n}{n} + e$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e$

L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$ est égale à e.