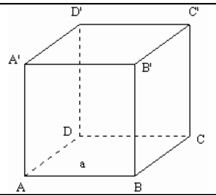
Volume

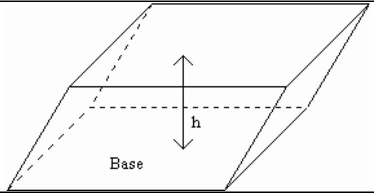
Cube :

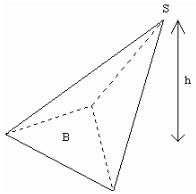
a est la longueur de l'arête .
Aire latérale : S L = 4 . a^2
Aire totale : S = 6 . a^2
Volume : V = a^3



Parallélépipède oblique :

B est l'aire de la base et h est la hauteur .
Volume : V = B h

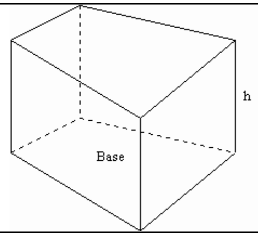




Pyramide :

B est l'aire de la base et h est la hauteur .

Volume : V = $\frac{1}{3}$ B h



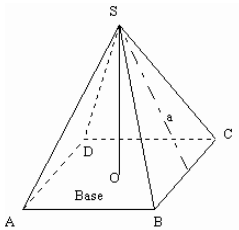
Prisme droit :

B est l'aire de la base, 2 p est le périmètre de la base et h est la hauteur .
Aire latérale : SL = 2 . p . h
Aire totale : S = 2 (p h + B)
Volume : V = B h

Pyramide régulière :

B est l'aire de la base, h est la hauteur OS, a est l'apothème et 2 p est le périmètre de la base .
Aire latérale : S L = p a
Aire totale : S = p a + B

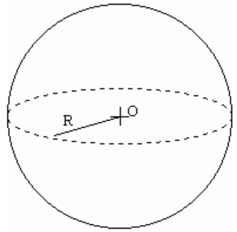
Volume : V = $\frac{1}{3}$ B h

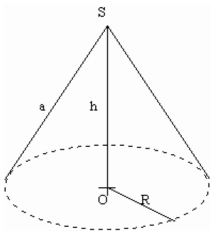


Boule (sphère) :

R est le rayon de la boule .
Aire totale : S = 4 π R ^{2}

Volume : $\frac{4}{3}$ π R ^{3}

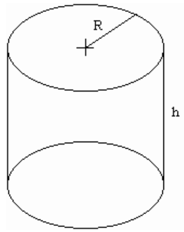




Cône de révolution :

R est le rayon de la base, h est la hauteur et a est l'apothème .
Aire latérale : SL = π R a
Aire totale : S = π R (R + a)

Volume : V = $\frac{1}{3}$ π R ^{2} h



Cylindre de révolution :

R est le rayon de la base et h est la hauteur .
Aire latérale : SL = 2 π R h
Aire totale : S = 2 π R (h + R)
Volume : π R ^{2} h

Un **tétraèdre** a 4 sommets.
Un solide est **régulier** quand ses arrêtes ont toutes la même longueur

Pour calculer une aire, on peut considérer que l'on assimile une petite portion d'aire à un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur d x, et on intègre (on somme) de a à b donc l'aire est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

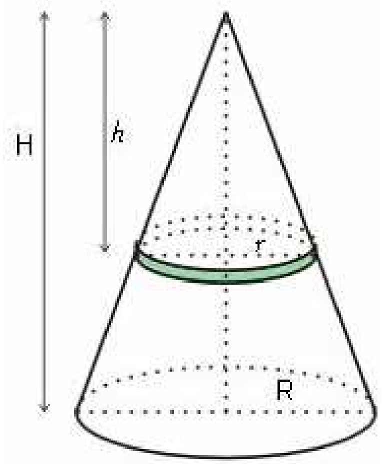
On pourra procéder de même pour calculer une distance ou un volume.

Exemple

On considère un cône de hauteur H et de rayon R.
Lorsqu'on coupe le cône à une hauteur h, on obtient un disque de rayon r.
On peut calculer r en utilisant le théorème de Thalès :

$r = \mathrm{R} \times \dfrac{h}{\mathrm{H}}$.

Le petit cylindre de hauteur $d\,h$, a pour volume $\pi\, r^2\, d\,h$.
On peut alors calculer le volume du cône en intégrant de 0 à H.



On obtient alors $V = \int_0^{\mathrm{H}} \pi\, r^2\,\mathrm{d}h$

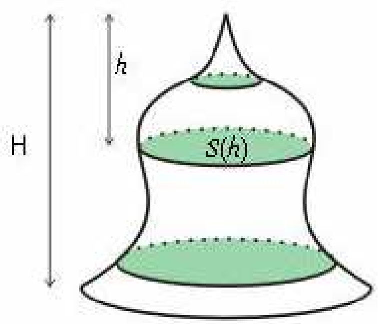
$$V = \int_0^{\mathrm{H}} \pi \left(\mathrm{R} \times \frac{h}{\mathrm{H}}\right)^2 \mathrm{d}h$$

$$V = \pi \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{H}^2} \int_0^{\mathrm{H}} h^2\,\mathrm{d}h = \pi \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{H}^2}\left[\frac{1}{3}h^3\right]_0^{\mathrm{H}} \text{ donc } V = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}$$

Le volume du cône est donc $\dfrac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}$

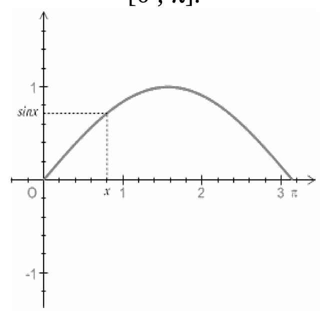
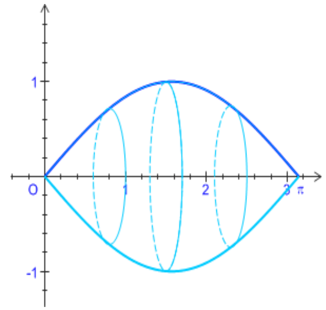
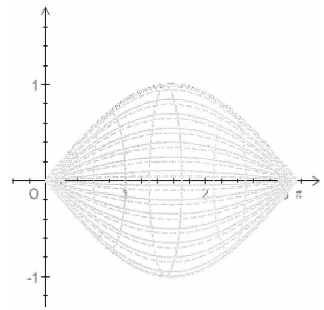
Propriété (admise)

Pour un volume V de hauteur H dont la section avec un plan à la hauteur h a pour aire S(h), on a : $V = \int_0^{\mathrm{H}} S(h)\,\mathrm{d}h$ unités de volume.



Exemple 1 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm, on considère la courbe représentant la fonction sinus sur [0 ; π]. Calculer le volume que l'on obtient par rotation de cette courbe autour de l'axe Ox.

On trace la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle [0 ; π].	Puis on fait tourner cette courbe autour de l'axe Ox.	On obtient alors un volume V
		

La section de ce volume par un plan perpendiculaire à l'axe Ox en son point d'abscisse x, est un disque de rayon sin x. L'aire de cette section est donc, en unité d'aire, égale à $\pi \sin^2 x$.

On en déduit que le volume V est donné, en unités de volume, par: $\int_0^{\pi} \pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

On peut calculer cette intégrale en remarquant que $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$,

donc $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

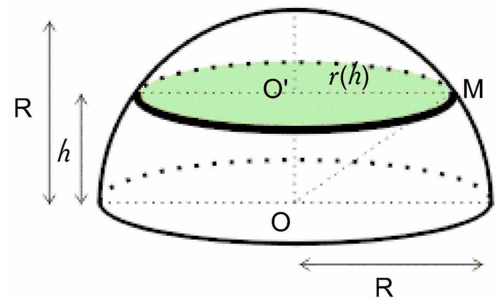
$$\text{On a donc } V = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$\text{Donc } V = \pi\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \pi \times 0 = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Le volume V est égal à $\dfrac{1}{2}\pi^2$ unités de volume.

Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

On considère la demi-sphère de centre O et de rayon R
La section de la demi-shère par un plan horizontal à la hauteur h est un disque de rayon $r(h)$ et d'aire S(h).
On peut calculer le rayon $r(h)$ en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OO'M.



Le point M se trouvant sur la sphère, on a OM = R

Donc $h^2 + r(h)^2 = \mathrm{R}^2$ donc $r(h) = \sqrt{\mathrm{R}^2 - h^2}$. Donc $S(h) = \pi\, r(h)^2 = \pi(\mathrm{R}^2 - h^2)$

Le volume de la demi-sphère est alors donné par

$$\int_0^{\mathrm{R}} \pi(\mathrm{R}^2 - h^2)\,\mathrm{d}h = \pi\left[\mathrm{R}^2 h - \frac{1}{3}h^3\right]_0^{\mathrm{R}} = \pi\left(\mathrm{R}^3 - \frac{1}{3}\mathrm{R}^3\right) - 0 = \pi\left(\frac{2}{3}\mathrm{R}^3\right) \text{ donc } V = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3.$$