**ASIE JUIN – 99**

**1 :** Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$

***a* :** Factoriser P(Z).

***b* :** En déduire les solutions dans l'ensemble C des complexes de l'équation P(Z) = 0.

***c* :** Déduire de la question précédente les solutions dans C de l'équation d'inconnue $z$ : $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

**2 : *a* :** Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ). Unité graphique 5m.

Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 \text{ , } b = -\frac{1}{5} - \frac{3i}{5} \text{ et } c - \frac{1}{5} + \frac{3i}{5} \text{ .}$$

***b* :** Démontrer que les points O , A , B et C sont situés sur un cercle , que l'on déterminera.

**3 :** Placer le point D d'affixe $d = -0{,}5$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe $z'$ défini par : $z' = \dfrac{a-c}{d-c}$

En déduire le rapport $\dfrac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de $z'$ ?

**CORRECTION**

**1: *a* :** $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$

***b*:** Les solutions de l'équation $P(z) = 0$, dans C, sont donc: 1 , – 1 , i et – i .

***c*:** D'après la question précédente, l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ peut s'écrire : $\dfrac{2z+1}{z-1} = 1$ ou $\dfrac{2z+1}{z-1} = -1$ ou $\dfrac{2z+1}{z-1} = i$ ou $\dfrac{2z+1}{z-1} = -i$.

$\dfrac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow 2z + 1 = z - 1 \Leftrightarrow z = -2$

$\dfrac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow 2z + 1 = -z + 1 \Leftrightarrow 3z = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\dfrac{2z+1}{z-1} = i \Leftrightarrow 2z + 1 = i(z - 1) \Leftrightarrow (2 - i)z = -1 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-i}{2-i} = \dfrac{(-1-i)(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-2+1-i-2i}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

$\dfrac{2z+1}{z-1} = -i \Leftrightarrow 2z + 1 = -i(z - 1) \Leftrightarrow (2 + i)z = -1 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2+i} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Ce qui fournit les valeurs: $z = -2$ ou $z = 0$ ou $z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$ ou $z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

**2: *a*:** Sans difficultés, on place les points !

***b*:** $|a + 1| = |b + 1| = |c + 1| = |0 + 1| = 1$

Les quatre points O , A , B , C appartiennent au cercle de centre K (– 1 ; 0) et de rayon $r = 1$.

**3:** $\dfrac{a-c}{d-c} = \dfrac{-2 + \frac{1}{5} - \frac{3i}{5}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3i}{5}} = \dfrac{2(9+i)}{3+6i} = 2\,\dfrac{3+i}{1+2i}$

$\dfrac{2(3+i)(1-2i)}{5} = 2(1 - i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$

On en déduit que le rapport $\dfrac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}$

On peut aussi en déduire que l'angle ( $\overrightarrow{CA}$ , $\overrightarrow{CD}$ ) à une mesure de $-\dfrac{\pi}{4}$.

Comme de plus le triangle ACO est rectangle en C (car OA est un diamètre du cercle de centre K et de rayon 1), on peut dire que la droite (CD) est une bissectrice des droites (CO) et (CA).