**Centres étrangers juin 2003 partiel**

On appelle $f$ la fonction définie sur l'intervalle I = $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$.

On note $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

## I. Étude de la fonction *f*

**1.** Étude des variations de la dérivée $f'$.

***a.*** $f'$ désigne la fonction dérivée première de $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde.
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

***b.*** Étudier les variations de $f'$ sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

***c.*** Déterminer les limites de $f'$ en $-2$ et en $+\infty$.

**2.** Étude du signe de $f'(x)$.

***a.*** Montrer que sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[-0{,}6\,;-0{,}5]$.

***b.*** En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.

**3.** Étude des variations de $f$.

***a.*** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

***b.*** Déterminer les limites de $f$ en $-2$ et en $+\infty$.

***c.*** Dresser le tableau de variation de $f$.

## II. Position de la courbe $(C_f)$ par rapport à ses tangentes

Soit $x_0$ un réel appartenant l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, on appelle $T_{x_0}$ la tangente $(C_f)$ au point d'abscisse $x_0$.

On note, pour $x$ appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $d(x) = f(x) - [\,f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,]$

**1.** Étude des variations de $d$.

***a.*** Vérifier que, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

***b.*** En utilisant la croissance de la fonction $f'$, donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de $x$.
En déduire les variations de $d$ sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

**2.** Déterminer la position relative de $(C_f)$ et de $T_{x_0}$.

## CORRECTION

## I. Étude de la fonction *f*

**1. *a.*** $f'(x) = 1 \times \ln(x+2) + x \times \dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1\times(x+2) - x\times 1}{(x+2)^2} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

***b.*** Étudier les variations de $f'$ sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

$x > -2$ donc $x + 4 > 0$ donc $f''(x) > 0$ donc $f'$ est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

***c.*** $f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$ or $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} x + 2 = 0^+$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \ln(x+2) = -\infty$

$\dfrac{x}{x+2} = x \times \dfrac{1}{x+2}$ ; puisque $x + 2 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ donc quand $x$ tend vers $-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{x}{x+2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f'(x) = -\infty$

$f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$

$\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

| $x$ | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ‖ | | $+$ | | |
| $f'$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. *a.*** $f'$ est une fonction définie, continue, strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$,

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ donc $f'(]-2\,;+\infty[) = \mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

$f'(-0{,}6) < 0$ ; $f'(-0{,}5) > 0$ et $f'$ est croissante sur $]-2\,;+\infty[$ donc $f'$ s'annule entre – 0,6 et – 0,5 donc $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

***b.*** $f'$ est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$, et $f'(\alpha) = 0$ donc :

| $x$ | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3. *a.***

| $x$ | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | |

avec $m = f(\alpha)$

***b.*** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \ln(x+2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

***c.***

| $x$ | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**II. Position de la courbe ($C_f$) par rapport à ses tangentes**

**1. *a.*** La tangente $T_{x_0}$ à ($C_f$) au point d'abscisse $x_0$ a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Soit M le point de la courbe d'abscisse $x$, $y_M = f(x)$
Soit P le point de la tangente d'abscisse $x$, $y_P = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ donc $d(x) = y_M - y_P$

$x$ est la variable, $x_0$ est une constante donc la dérivée de $x$ est 1, les dérivées de $x_0$, de $f(x_0)$ qui sont des constantes sont nulles donc en écrivant l'une sous l'autre l'expression et sa dérivée :

$$\begin{array}{lcccccccccc} d(x) & = & f(x) & - & [f'(x_0) & (x & - & x_0) & + & f(x_0)] \\ d'(x) & = & f'(x) & - & [f'(x_0) & (1 & - & 0) & + & 0 \end{array}$$

soit $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

***b.*** $f'$ est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$, donc si $x > x_0$

| $x$ | $-2$ | | $x_0$ | | $x$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | $f(x)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

si $x > x_0$ alors $f'(x) > f'(x_0)$ donc $d'(x) > 0$
de même : si $-2 < x < x_0$

| $x$ | $-2$ | | $x$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

si $-2 < x < x_0$ alors $f'(x) < f'(x_0)$ donc $d'(x) < 0$

si $x = x_0$ alors $f'(x) = f'(x_0)$ donc $d'(x) = 0$
de plus $d(x_0) = 0$

| $x$ | $-2$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $d$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

**2.** $d(x) = y_M - y_P$ donc pour tout $x > -2$, $d(x) \geq 0$
La courbe est toujours au dessus de sa tangente pour n'importe quelle valeur de $x_0$ de l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.