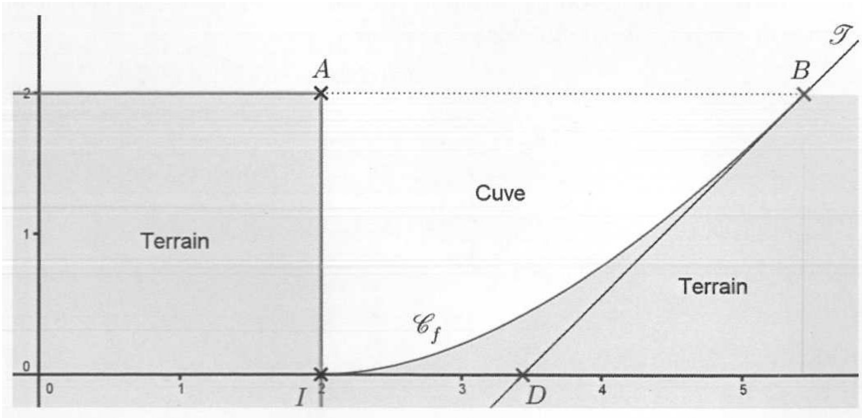
Amérique du Nord juin 2016

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant ;
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe V ; de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2 e] définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 met constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $A(2 ; 2)$, $I(2 ; 0)$ et $B(2\text{ e} ; 2)$.

Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite T avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite T et en déduire les coordonnées de D.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2$ e.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. *a.* Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2 e], la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2 e].

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

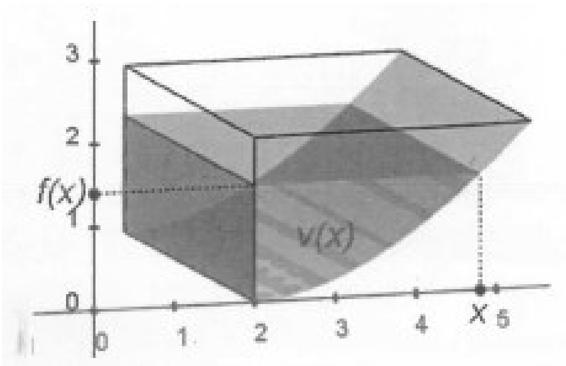
Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2 e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2 e],

$$v(x) = 5\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right).$$

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

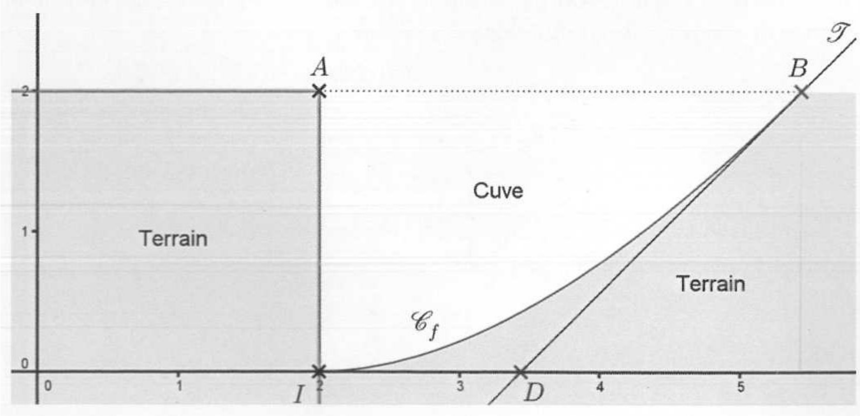
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.
On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.



Variables :	a est un réel b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2 b prend la valeur 2e Tant que $u(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : │ c prend la valeur $(a + b)/2$ │ Si $v(c) < \text{V}/2$, alors : │ │ a prend la valeur c │ Sinon │ │ b prend la valeur c │ Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

CORRECTION

EXERCICE 2 (6 points) Commun à tous les candidats



Partie A

1. $f(2\text{ e}) = 2\text{ e} \ln \text{e} - 2\text{ e} + 2$ or $\ln \text{e} = 1$ donc $f(2\text{ e}) = 2$ donc $B \in \mathscr{C}_f$

$f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2$ or $\ln 1 = 0$ donc $f(2) = 0$ donc $I \in \mathscr{C}_f$

Soit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$f'(2) = 0$ donc la tangente en I à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses et passe par I, or I est un point de l'axe des abscisses donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. *a.* Une équation de la droite T est $y = f'(2\text{ e})(x - 2\text{ e}) + 2$ or $f'(2\text{ e}) = 1$
Une équation de la droite T est $y = x - 2\text{ e} + 2$
$y_D = 0$ donc $0 = x_D - 2\text{ e} + 2$ donc $x_D = 2\text{ e} - 2$

b. L'aire du triangle ABI est égale à $\dfrac{1}{2} AB \times AI = \dfrac{1}{2}(x_B - x_A) \times y_A = \dfrac{1}{2}(2\text{ e} - 2) \times 2 = 2\text{ e} - 2$

L'aire du trapèze $AIDB$ est égale à $\dfrac{1}{2}(ID + AB) \times \text{AI} = \dfrac{1}{2}(2\text{ e} - 2 - 2 + 2\text{ e} - 2) \times 2$ soit $4\text{ e} - 6$

$2\text{ e} - 2 \le \text{S} \le 4\text{ e} - 6$ soit approximativement entre 3,436 et 4,874

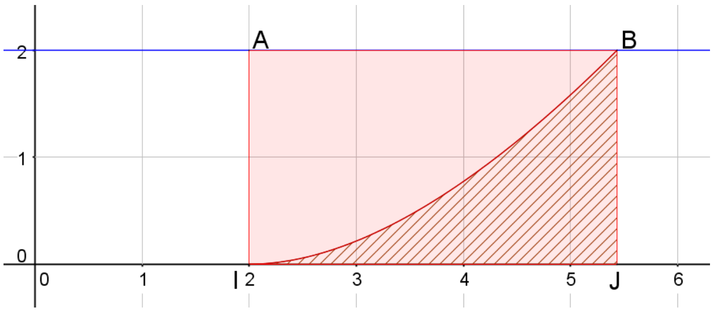
3. *a.* Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2 e], la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2} \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$

est une primitive de ta fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

oit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} & v'(x) = x \end{cases}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = g(x)$ donc G est une primitive de la fonction g

b. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2 e] est $F(x) = G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2} \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$

c. $\displaystyle\int_2^{2\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \text{F}(2\text{ e}) - \text{F}(2)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 2$ et $x = 2\text{ e}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$



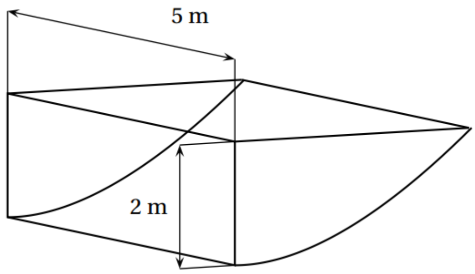
$\text{F}(2\text{ e}) = 2\text{ e}^2 \ln \text{e} - 3\text{ e}^2 + 4\text{ e} = 2\text{ e}^2 - 3\text{ e}^2 + 4\text{ e}$ donc
$\text{F}(2\text{ e}) = 4\text{ e} - \text{e}^2$

$\text{F}(1) = 2 \ln 1 - 3 + 4 = 1$ donc $\displaystyle\int_2^{2\text{e}} f(x)\,\text{d}x = 4\text{ e} - \text{e}^2 - 1$

S est l'aire du carré AIJB – l'aire calculée précédemment

soit $\text{S} = (2\text{ e} - 2) \times 2 - (4\text{ e} - \text{e}^2 - 1)$ donc $\text{S} = \text{e}^2 - 3$.

$V = S \times 5 = 5\,e^2 - 15$ unités de volume soit 21,95 m^3 soit 22 m^3 à l'unité près.



Partie B

1. D'après la question a.1. pour tout $x \in [2\ ;\ 2\,e\ ]$; $f\,'(x) = \ln \dfrac{x}{2}$

Or $2 \leq x \leq 2\,e \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{x}{2} \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln \dfrac{x}{2} \leq \ln e \Leftrightarrow 0 \leq f\,'(x) \leq 1$

$f\,'$ est strictement positive sur $]\ 2\ ;\ 2\,e\ ]$ et la fonction f strictement croissante sur cet intervalle.

la fonction f est continue strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\,e\ ]$; $f(2) = 0$ et $f(2\,e\ ) = 2$ donc l'image par f de l'intervalle $[2\ ;\ 2\,e\ ]$ est $[0\ ;\ 2]$

$1 \in [0\ ;\ 2]$ donc, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\,e\ ]$.

$f\ (4{,}31) \approx 0{,}\ 999 < 1$ et $f\ (4{,}32) \approx 1{,}\ 0069 > 1$, donc $4{,}\ 31 < \alpha < 4{,}\ 32$.
Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4{,}\ 32$ alors $v(\alpha) \approx 7{,}528\ m^3$ soit 8 m^3 au m^3 près.

2. Cet algorithme permet par approximations successives de déterminer la hauteur d'eau dans la cuve lorsqu'elle est à moitié pleine.