Amérique du Nord juin 1999

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons indépendantes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1 : Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets?

2 : Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets?

3 : Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets?

4 : Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1 : Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

2 : Déterminez les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

CORRECTION

Partie I

L'univers est l'ensemble des choix de sujets possibles par le candidat. Il en choisit 2 parmi 100, donc le cardinal de l'univers est : $\frac{100!}{2!98!} = 4950$.

1 : Le candidat ne connaît aucun des deux sujets si et seulement si il les choisit parmi les 50 qu'il ne connaît pas.

Il y a $\frac{50!}{2!48!} = 1225$ façons de faire un tel choix ; donc ; la probabilité que le candidat ne connaisse aucun des deux sujets est : $\frac{1225}{4950} = \frac{49}{198}$.

2 : C'est la même question car il connaît exactement 50 sujets sur les 100 possibles.

3 : Le candidat à $50 \times 50 = 2500$ façons de choisir les sujets et d'en connaître exactement 1.

La probabilité qu'il a de choisir les sujets et d'en connaître exactement 1 est donc : $\frac{2500}{4950} = \frac{50}{99}$.

4 : L'événement contraire est qu'il ne connaisse aucun des sujets.

Donc la probabilité demandée est : $1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}$.

Partie II

1. L'événement contraire de connaître au moins un sujet est "ne connaître aucun sujet". C'est à dire ; de choisir les deux sujets parmi les $(100 - n)$ inconnus du candidats.

Il y a alors $C(100 - n\,;\,2) = \frac{(1000 - n)!}{2!(100 - n - 2)!} = \frac{(100 - n)(100 - n - 1)}{2}$ choix de sujets inconnus du candidat.

La probabilité que le candidat connaisse au moins un sujet est alors : $p_n = 1 - \frac{(100 - n)(99 - n)}{9\,900}$.

Ce qui se simplifie en : $p_n = \frac{199\,n}{9\,900} - \frac{n^2}{9\,900}$

2. Simple "inéquation" du second degré. On trouve que n doit supérieur à 77.