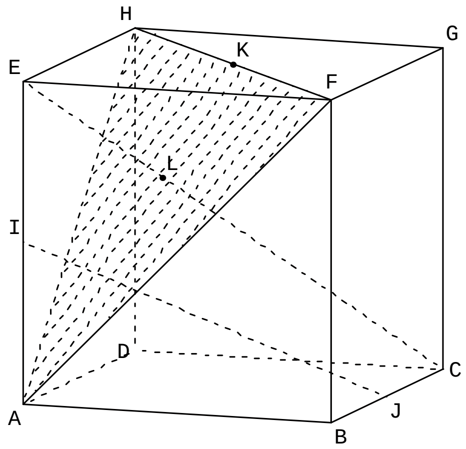
EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appel1e **P** le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
Le point J est le milieu du segment [BC],
Le point K est le milieu du segment [HF],
Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'*est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.*

1. *a.* Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. *a.* Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} . \overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} . \overrightarrow{BG}$ est égal à (– 1).
c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} . \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} . \overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3. Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
a. le plan **P** pour équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$.
b. le plan **P** a pour équation cartésienne $x - y + z = 0$.
c. le plan **P** a pour équation cartésienne $-x + y + z = 0$.
d. le plan **P** a pour équation cartésienne $x + y - z = 0$.

4. *a.* $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan **P**.
b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan **P**.
c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au p1an **P**.
d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan **P**.

5. *a.* $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$
b. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$
c. $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
d. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et I et X_n, une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A. On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note:

A l'événement « l'étudiant répond A »,
B l'événement « l'étudiant répond B »,
C l'événement « l'étudiant répond C »,
R l'événement « l'étudiant connait la réponse »,
$\overline{R}$ l'événement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'événement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et en fonction de r.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p.
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95% de r.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leq 250)$ à 10^{-2} près.

On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leq t)$ où X est la variable aléatoire de la question 2.*c*.

Annexe 1

E12 =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684
12	245	0,695	0,699	0,702	0,706	0,709	0,713	0,716	0,720
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983
28									

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leq 245,3)$.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On note f la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{x}$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x + 1 - m\,\mathrm{e}^{-x}$

Et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ du plan.

1. *a.* Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et – e). Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. *a.* On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (O$y$) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

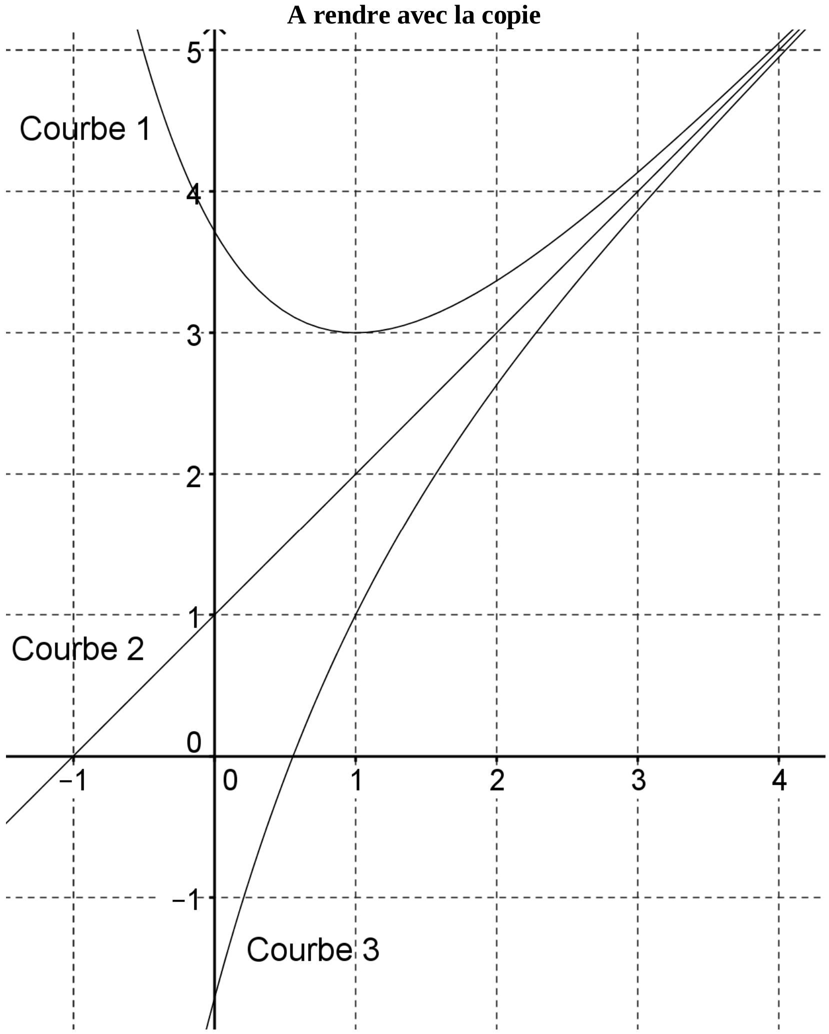
b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (O$y$) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathrm{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathrm{A}(a) = 2\,\mathrm{e} - 2\,\mathrm{e}^{1-a}$. En déduire la limite de $\mathrm{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Annexe 2

Exercice 3

A rendre avec la copie



EXERCICE 4 (5 points) candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables:      A et B des nombres réels
                K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
        Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
        Affecter à B la valeur 1/3
FinPour
Afficher A
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (b_n).

3. *a.* On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

EXERCICE 4 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par : $u_0 = 0$; $v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :       u, v et w des nombres réels
                  N et k des nombres entiers
Initialisation :  u prend la valeur 0
                  v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
      w prend la valeur u
      u prend la valeur (w + v)/2
      v prend la valeur (w + 2v)/3
FinPour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A^n X_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A\, X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit P P'.

On admet que P' B P = A. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'\, B^n\, P$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. *a.* Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

1. Réponse *b.*

a. Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles. FAUX

Dans le triangle AEC, I est le milieu de [AE] donc la parallèle en I à (EC) passe par le milieu de [AC].

b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires. VRAI

Si les (IJ) et (EC) sont coplanaires, A $\in$ (EI) donc A appartient au plan (ECI)

La droite (CJ) appartient au plan (ECI) donc B appartient au plan (ECI) donc les points A, B, C, E sont coplanaires, le cube n'existe pas, ce qui est impossible.

c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes. FAUX

Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires donc non sécantes.

d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues. FAUX

Le point I n'appartient pas à (EC) donc les droites (IJ) et (EC) ne sont pas confondues.

2. Réponse *c.*

$\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\,.\,(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG})$

$\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{BF}\,.\,\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\,.\,\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{BG} = 0+0+0+\text{BF}^2 = 1$

3. Réponse *d.*

Dans le repère orthonormé $(\text{A}\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$,

A a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0)

G a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1)

F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1)

En remplaçant successivement dans les différentes équations proposées :

a. le plan **P** pour équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$, FAUX

A n'appartient pas à ce plan

b. le plan **P** a pour équation cartésienne $x - y + z = 0$, FAUX

F n'appartient pas à ce plan

c. le plan **P** a pour équation cartésienne $-x + y + z = 0$, FAUX

G n'appartient pas à ce plan.

d. le plan **P** a pour équation cartésienne $x + y - z = 0$, VRAI

Les trois points A, F, G appartiennent à ce plan.

4. Réponse *b*

Le plan **P** a pour équation cartésienne $x + y - z = 0$ donc un vecteur normal $\vec{n}$ au plan **P** a pour coordonnées (1 ; 1 ; – 1).

a. $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan **P**. FAUX

$\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{EG}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan **P**. VRAI

$\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; – 1) donc $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$

L $\in$ (EC) donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EL}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{EL}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au p1an **P**. FAUX

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées (1 ; 0,5 ; – 0,5) donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan **P**. FAUX

$\overrightarrow{DI}$ a pour coordonnées (0 ; – 1 ; 0,5) donc $\overrightarrow{DI}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

5. **Réponse *d.***

Cherchons les coordonnées de L

Un vecteur directeur de (EC) est $\overrightarrow{EC}$ de coordonnées (1 ; 1 ; – 1).

La droite (EC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{EC}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Une représentation paramétrique de la droite (EC) est : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t+1 \end{cases}$ (($t \in \mathbb{R}$).

Le plan **P** a pour équation cartésienne $x + y - z = 0$.

L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan **P** donc L a pour coordonnées (t ; t ; $-t+1$)

L $\in$ P, donc $x_L + y_L - z_L = 0$ soit $3t - 1 = 0$ donc $t = \dfrac{1}{3}$

L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

a. $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ FAUX

Démonstration sans utiliser les coordonnées de L : $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH}) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KF})$

K est le milieu de [HF] donc $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AK} \neq \overrightarrow{AL}$

c. $\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ FAUX

Démonstration sans utiliser les coordonnées de L : les points I, D, J ne sont pas alignés

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95 donc

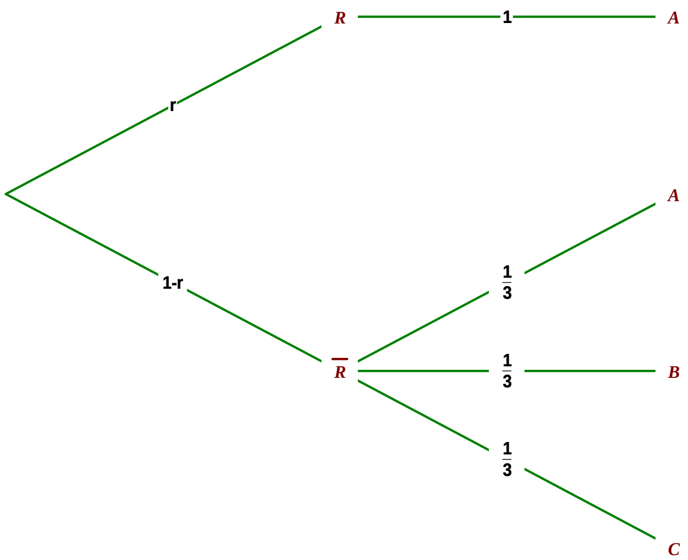
$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \le f \le p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}95$$

$p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le f \le p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow p \le f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le p \Leftrightarrow f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le p \le f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $P\left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le p \le f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}95$

L'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

1. *a.*



b. D'après la formule des probabilités totale :

P(A) = P(A $\cap$ R) + P(A $\cap$ $\overline{\text{R}}$) = $r + \dfrac{1}{3}(1 - r) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}r$ donc P(A) = $\dfrac{1+2r}{3}$.

c. $P_A(R) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(A)} = \dfrac{r}{\frac{1+2r}{3}} = \dfrac{3r}{1+2r}$.

2. a. On a une succession de 400 expériences aléatoires identique et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

réussite : l'étudiant donne la bonne réponse $\left(p = \dfrac{1+2r}{3} \right)$)

échec : l'étudiant ne donne pas la bonne réponse $\left(q = 1 - p = 1 - \dfrac{1+2r}{3} = \dfrac{2-2r}{3} \right)$

donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(400 ; \dfrac{1+2r}{3} \right)$.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés donc la fréquence des étudiants de cet échantillon répondant A est $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$.

Un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p est : $I = \left[0,6 - \dfrac{1}{\sqrt{400}} ; 0,6 + \dfrac{1}{\sqrt{400}} \right] = [\ 0,55 ; 0,65\ ]$

$p = \dfrac{1+2r}{3}$ donc $0,55 \leq \dfrac{1+2r}{3} \leq 0,65 \Leftrightarrow 0,55 \times 3 \leq 1 + 2r \leq 3 \times 0,65 \Leftrightarrow 1,65 - 1 \leq 2r \leq 1,95 \Leftrightarrow 0,325 \leq r \leq 0,475$

Un intervalle de confiance au seuil de 95% de r est [0,325 ; 0,475].

c. $r = 0,4$ donc $\dfrac{1+2r}{3} = 0,6$

X suit une loi binomiale de paramètres (400 ; 0,6) donc d'espérance $400 \times 0,6 = 240$ et d'écart-type $\sqrt{400 \times 0,6 \times 0,4} = \sqrt{96}$ soit $4\sqrt{6}$.

i. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considère que X suit une loi normale de même espérance 240 et de même écart-type $4\sqrt{6}$.
On pouvait deviner ces résultats en regardant la formule du tableau donné en annexe :

= LOI.NORMALE($A1+E$1 ; 240 ; RACINE(96) ;VRAI)

ii. $P(X \leq 250) = 0,846$ d'après la table soit environ 0,85.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = e^x + x\,e^x$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2. $\begin{cases} u(x) = x+1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $f'(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x)$ a le même signe de $x + 2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		
f	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. a. $g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - m\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = m\,e^{-x} \Leftrightarrow (x+1)\,e^x = m \Leftrightarrow f(x) = m$.

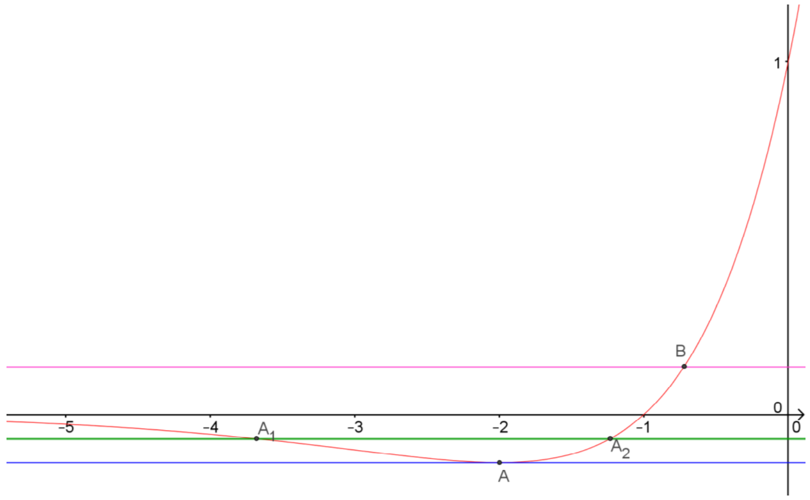
b. La fonction f admet un minimum en -2 égal à $-e^{-2}$ donc :

si $m < -e^{-2}$ pas de point d'intersection

si $m = -e^{-2}$ un seul point d'intersection d'abscisse -2 (droite bleue)

si $-e^{-2} < m < 0$ deux points d'intersection, l'un d'abscisse intérieure à -2, l'autre d'abscisse supérieure à -2 (droite verte)

si $m \geq 0$ un seul point d'intersection d'abscisse supérieure -1 (droite rose)

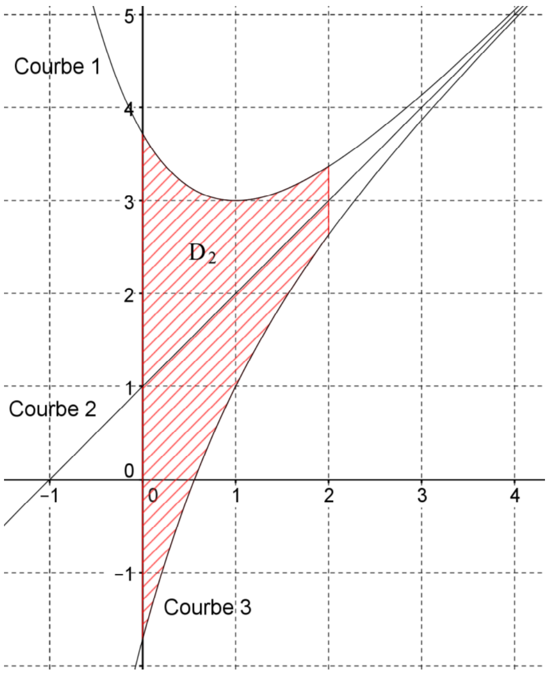


2. $g_m(0) = 1 - m$ donc $g_0(0) = 1$, la courbe 2 correspond à $\mathbf{C}_0$,
$g_e(0) = 1 - e$ or $1 - e < -1$, la courbe 3 correspond à $\mathbf{C}_e$,
$g_{-e}(0) = 1 + e$ or $1 + e > 3$, la courbe 1 correspond à $\mathbf{C}_{-e}$,

3. Étudier la position de la courbe $\mathbf{C}_m$ par rapport à la droite d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.
$g_m(x) - (x + 1) = - m\,e^{-x}$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc :

si $m < 0$, pour tout x réel, $g_m(x) - (x + 1) > 0$ donc $\mathbf{C}_m$ est au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$.
si $m = 0$, pour tout x réel, $g_m(x) - (x + 1) = 0$ donc $\mathbf{C}_0$ est confondue avec la droite d'équation $y = x + 1$.
si $m > 0$, pour tout x réel, $g_m(x) - (x + 1) < 0$ donc $\mathbf{C}_m$ est en dessous de la droite d'équation $y = x + 1$.

4. *a.*



b. La courbe C_e est en dessous de la courbe C_{-e} sur $\mathbb{R}$ donc : $\mathbf{A}(a) = \displaystyle\int_0^a (g_{-e}(x) - g_e(x))\,dx$

$g_e(x) = x + 1 - e \times e^{-x} = x + 1 - e^{1-x}$
$g_{-e}(x) = x + 1 + e \times e^{-x} = x + 1 + e^{1-x}$ donc $g_{-e}(x) - g_e(x) = 2\,e^{1-x}$

$\mathbf{A}(a) = \displaystyle\int_0^a 2\,e^{1-x}\,dx = \left[-2\,e^{1-x}\right]_0^a = -2\,e^{1-a} + 2\,e$

Pour tout réel a positif : $\mathbf{A}(a) = 2\,e - 2\,e^{1-a}$.
$\mathbf{A}(a) = 2\,e - 2\,e^{1} \times e^{-a}$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-a} = 0$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathbf{A}(a) = 2\,e$.

EXERCICE 4 (5 points) candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$

2. $|z_0| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$

$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{3} = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ donc $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. *a.*

K	A	B
1	$\dfrac{1+\sqrt{1^2+1^2}}{3}$ soit environ 0,8047	$\dfrac{1}{3}$ soit environ 0,3333
2	0,5586	$\dfrac{1}{9}$ soit environ 0,1111

b. L'algorithme calcule de proche en proche a_K et b_K pour K variant de 1 à N et affiche a_N.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$ donc $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}\, b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = a_{n+1} + \mathrm{i}\, b_{n+1}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$.

2. $b_{n+1} = \dfrac{1}{3} b_n$ donc la suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ donc $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

3. *a.* $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$ donc $|z_{n+1}| = \dfrac{1}{3}\,|z_n + |z_n||$ d'après l'inégalité triangulaire, $|z_{n+1}| \le \dfrac{1}{3}\,(|z_n| + |z_n|)$

soit $|z_{n+1}| \le \dfrac{2}{3}|z_n|$. Pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \le \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Initialisation : si $n = 0$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \sqrt{2} = |z_0| = u_0$.

Hérédité, montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ alors $u_{n+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \le \dfrac{2|z_n|}{3}$ donc $u_{n+1} \le \dfrac{2}{3} u_n$

$$\begin{array}{lcl} u_{n+1} & \le & \dfrac{2}{3} u_n \\ u_n & \le & \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \end{array} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{lcl} u_{n+1} & \le & \dfrac{2}{3} u_n \\ \dfrac{2}{3} u_n & \le & \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \end{array} \quad \text{donc } u_{n+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

$-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ or $0 \le u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. Pour tout entier naturel n, $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ or $a_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$ donc $\sqrt{a_n^2} \le |z_n|$ donc pour tout entier naturel n, $|a_n| \le u_n$.

$0 \le |a_n| \le u_n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

EXERCICE 4 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2}{3}$

2. *a.*

k	w	u	v
1	0,5	0,5	0,6667
2	0,5833	0,5833	0,6111

b. L'algorithme calcule successivement a_k et b_k pour k variant de 1 à N et affiche a_N et b_N.

3. *a.* $A X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

Pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A X_n$.

b. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : A n'est pas nulle donc $A^0 = I_2$ donc $X_0 = A^0 X_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $X_n = A^n X_0$ alors $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$
$X_{n+1} = A X_n$ donc $X_{n+1} = A \times A^n X_0$. donc $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $X_0 = A^0 X_0$.

4. ***a.*** $P P' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{2} & -\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{3} \\ -\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{2} & -\frac{6}{5}\times\frac{-1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$P P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

P et P' sont inverses l'une de l'autre donc P P' = P' P = I_2

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P' B^n P$.

Initialisation : A et B ne sont pas nulles donc $A^0 = B^0 = I_2$ donc $P' B^0 P = P' P = I_2 = A^0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $A^n = P' B^n P$ alors $A^{n+1} = P' B^{n+1} P$.
$A^{n+1} = A A^n = P' B P \times P' B^n P$ donc $A^{n+1} = P' B^n \times B^n P$ donc $A^{n+1} = P' B^{n+1} P$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $A^n = P' B^n P$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

$P' B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow P' B^n P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

$P' B^n P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{6}{5} & \frac{1}{2}\times\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{6}{5} \\ \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{6}{5} & \frac{1}{2}\times\frac{6}{5}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{6}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow P' B^n P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

donc $A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

5. *a.* $X_n = A^n X_0$ donc $X_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n donc $u_n = \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

b. $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}$.