Amérique du Nord juin 2016

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. *a.* Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$$

b. Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2))$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note R_0 la matrice ligne $(0\ 0\ 1)$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. Il y a une erreur dans l'écriture de D, il faut lire $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et non $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec : $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *a.* Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0 P = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$.

Interpréter ces résultats.

CORRECTION

1. *a.* Sachant qu'à la fin du n-ième tirage, l'urne U ne contient pas de boule blanche la probabilité qu'à la fin du $(n + 1)$-ème tirage elle en contienne une est $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$

Si à la fin du n-ième tirage, l'urne U ne contient pas de boule blanche, l'urne V en contient alors 2 donc au tirage suivant on ne peut choisir qu'une blanche dans l'urne V pour la déposer dans l'urne U donc $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$

Si à la fin du n-ième tirage, l'urne U contient une seule boule blanche, l'urne V en contient une donc soit on prend une boule noire dans l'urne U et une boule noire dans l'urne V soit on prend une boule blanche dans l'urne U et une boule blanche dans l'urne V alors $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Si à la fin du n-ième tirage, l'urne U contient deux boules blanches, l'urne V contient alors deux boules noires donc on prend une boule blanche dans l'urne U et une boule noire dans l'urne V

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1$

b. $P(X_{n+1} = 1) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n = 1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\ P(X_n = 2)$.

$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2} P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$.

2. $R_1 = R_0 M = (0 \quad 1 \quad 0)$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.
Initialisation : si $n = 0$, $M \neq O$ donc $M^0 = I$ (matrice identité) donc $R_0 \times M^0 = R_0 \times I = R_0$
La propriété est initialisée.
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $R_n = R_0 \times M^n$ alors $R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}$.
$R_{n+1} = R_n \times M$ et $R_n = R_0 \times M^n$ donc $R_{n+1} = R_0 \times M \times M^n = R_0 \times M^{n+1}$.
La propriété est héréditaire
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. $P \times P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$
Initialisation : si $n = 0$, $M \neq O$ et $D \neq O$ donc $M^0 = D^0 = I$ (matrice identité) donc $P \times D^n \times P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = M^0$
La propriété est initialisée.
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$alors $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$
$M^{n+1} = M^n \times M$ et $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} = P \times D \times I \times D^n \times P^{-1}$
$M^{n+1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$
La propriété est héréditaire
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *a.* Calculer $D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

b. $R_0 P = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}\right)$, $R_n = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}; \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{6} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}\right)$

.

5. $P(X_n = 0) = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}$

$-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \dfrac{1}{6}$,

$P(X_n = 1) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \dfrac{2}{3}$

$P(X_n = 2) = \dfrac{1}{6} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \dfrac{1}{6}$.

Au bout d'un nombre important d'échanges, l'urne U contient :

- 0 boules blanches avec une probabilité $\dfrac{1}{6}$
- 1 boules blanches avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$
- 2 boules blanches avec une probabilité $\dfrac{1}{6}$.