

Retour sur les courbes Bézier

Dans une chronique de mai 2017, j'avais parlé des **courbes de Bézier** ; je vais revenir sur le sujet en approfondissant un peu l'aspect mathématique des choses.

En effet le nom de ce blog n'est-il pas **L^AT_EX et Mathématiques** ?

Il y aura naturellement des graphiques pour le tracé desquels je vais avoir besoin du package Euclide ; j'avais consacré quatre chroniques à cette extension en mai 2016, et j'avais corrigé et regroupé ces chroniques en une seule en novembre 2016 : le fichier complet s'appelle **Euclide_init**. Je vais également utiliser des méthodes pour définir des points décrites dans **Encore des graphiques**.

1 Barycentre

Les courbes de Bézier reposent sur la notion de barycentre de deux points.

Le point I est barycentre du système $\{A(a); B(b)\}$ avec $a + b \neq 0$, signifie que pour tout point X, $a \overrightarrow{XA} + b \overrightarrow{XB} = (a + b) \overrightarrow{XI}$.

Donc, en prenant X en A, on déduit que $b \overrightarrow{AB} = (a + b) \overrightarrow{AI}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}$.

Le point I est donc l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{b}{a + b}$.

Pour revenir aux courbes de Bézier, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$, le point I est barycentre du système $\{A(1 - t); B(t)\}$ signifie que I est l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport t .

Et quand t décrit l'intervalle $[0; 1]$, le point I décrit le segment $[AB]$.

2 Courbe de Bézier à trois points de contrôle

2.1 La théorie

On part de trois points A, B et C qu'il vaut mieux ne pas prendre alignés !

On va décrire la courbe de Bézier \mathcal{C} dont les trois points de contrôle sont A, B et C.

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$:

- on trace I le barycentre du système $\{A(1 - t); B(t)\}$;
- on trace J le barycentre du système $\{B(1 - t); C(t)\}$;
- on trace M le barycentre du système $\{I(1 - t); J(t)\}$.

La courbe \mathcal{C} est l'ensemble des points M quand t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

2.2 Les calculs

2.2.1 Forme vectorielle

- Le point I est le barycentre du système $\{A(1 - t); B(t)\}$ donc pour tout point X, on a $(1 - t) \overrightarrow{XA} + t \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XI}$. En prenant X en O, on a $(1 - t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}$.
- Le point J est le barycentre du système $\{B(1 - t); C(t)\}$, donc $(1 - t) \overrightarrow{OB} + t \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
- Le point M est le barycentre du système $\{I(1 - t); J(t)\}$, donc $(1 - t) \overrightarrow{OI} + t \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM}$.

De ces trois égalités vectorielles on déduit :

$$\overrightarrow{OM} = (1 - t) \left((1 - t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \right) + t \left((1 - t) \overrightarrow{OB} + t \overrightarrow{OC} \right).$$

Ce qui donne après développement : $\overrightarrow{OM} = (1 - t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1 - t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC}$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B et C, est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1-t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC}$$

dans laquelle t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

2.2.2 Forme paramétrique

En décomposant selon les vecteurs de base, on a :

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1-t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC} \iff \begin{cases} x = (1-t)^2 x_A + 2t(1-t)x_B + t^2 x_C \\ y = (1-t)^2 y_A + 2t(1-t)y_B + t^2 y_C \end{cases}$$

La courbe de Bézier de points de contrôles A ($x_A; y_A$), B ($x_B; y_B$) et C ($x_C; y_C$), est l'ensemble des points M ($x(t); y(t)$) vérifiant le système

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^2 x_A + 2t(1-t)x_B + t^2 x_C \\ y(t) = (1-t)^2 y_A + 2t(1-t)y_B + t^2 y_C \end{cases}$$

dans lequel t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

2.2.3 Tangentes

Cas général

On sait que, dans le cas général, la tangente à la courbe paramétrée représentant le point M ($x(t); y(t)$)

en $t = t_0$ a pour équation $\frac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ autrement dit $(y - y(t_0)) x'(t_0) = (x - x(t_0)) y'(t_0)$.

$x(t) = (1-t)^2 x_A + 2t(1-t)x_B + t^2 x_C$ donc $x'(t) = (-2 + 2t)x_A + (2 - 4t)x_B + 2tx_C$ c'est-à-dire $x'(t) = (2x_A - 4x_B + 2x_C)t - 2x_A + 2x_B$.

De même $y'(t) = (2y_A - 4y_B + 2y_C)t - 2y_A + 2y_B$.

Ce qui donne pour équation de la tangente au point de la courbe correspondant à $t = t_0$

$$(y - y(t_0)) ((2x_A - 4x_B + 2x_C)t_0 - 2x_A + 2x_B) = (x - x(t_0)) ((2y_A - 4y_B + 2y_C)t_0 - 2y_A + 2y_B).$$

Tangente en A

Le point A correspond à la valeur 0 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 0$.

$$x(t_0) = x(0) = x_A \text{ et } y(t_0) = y(0) = y_A$$

L'équation de la tangente à la courbe en A est alors

$$(y - y_A) (-2x_A + 2x_B) = (x - x_A) (-2y_A + 2y_B).$$

Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en A passe par le point B car : $(y_B - y_A) (-2x_A + 2x_B) = (x_B - x_A) (-2y_A + 2y_B)$.

Tangente en C

Le point C correspond à la valeur 1 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 1$.

$$x(t_0) = x(1) = x_C \text{ et } y(t_0) = y(1) = y_C$$

L'équation de la tangente à la courbe en C est alors

$$(y - y_C) ((2x_A - 4x_B + 2x_C) \times 1 - 2x_A + 2x_B) = (x - x_C) ((2y_A - 4y_B + 2y_C) \times 1 - 2y_A + 2y_B)$$

ce qui équivaut à

$$(y - y_C) (2x_A - 4x_B + 2x_C - 2x_A + 2x_B) = (x - x_C) (2y_A - 4y_B + 2y_C - 2y_A + 2y_B)$$

$$\text{ou encore } (y - y_C) (-2x_B + 2x_C) = (x - x_C) (-2y_B + 2y_C).$$

Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en C passe par le point B car : $(y_B - y_C) (-2x_B + 2x_C) = (x_B - x_C) (-2y_B + 2y_C)$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B et C, a pour tangente en A la droite (AB) et pour tangente en C la droite (CB)..

2.3 Exemple

On prend A de coordonnées (2; 1), B de coordonnées (1; 2) et C de coordonnées (4; 3) et on appelle \mathcal{C} la courbe de Bézier ayant A, B et C comme points de contrôle.

D'après ce qui a été vu précédemment, la représentation paramétrique de cette courbe est

$$\begin{cases} x(t) = (1 - 2t + t^2) \times 2 + (2t - 2t^2) \times 1 + t^2 \times 4 \\ y(t) = (1 - 2t + t^2) \times 1 + (2t - 2t^2) \times 2 + t^2 \times 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = 2 - 4t + 2t^2 + 2t - 2t^2 + 4t^2 \\ y(t) = 1 - 2t + t^2 + 4t - 4t^2 + 3t^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = 4t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$$

2.4 Graphiques

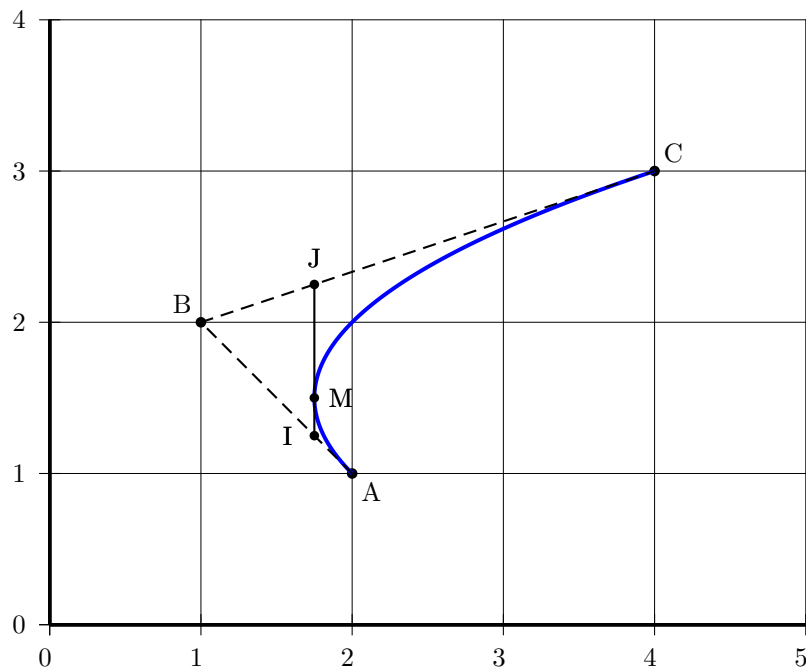
Pour tracer de façon efficace cette courbe de Bézier, on va définir les points avec l'instruction `\Cnode`; on pourra ainsi tracer la courbe en utilisant les lettres A, B et C, au lieu des coordonnées. Par la suite, il suffira de modifier les coordonnées des points sur la seule ligne où elles sont définies pour tracer une nouvelle courbe.

```
\Cnode*(2,1){A} \Cnode*(1,2){B} \Cnode*(4,3){C}
```

Pour voir un peu ce qui se passe, on a tracé les barycentres I, J et M, pour une valeur de t définie dans le texte du graphique. On peut modifier la valeur de t pour obtenir d'autres positions des points I, J et M.

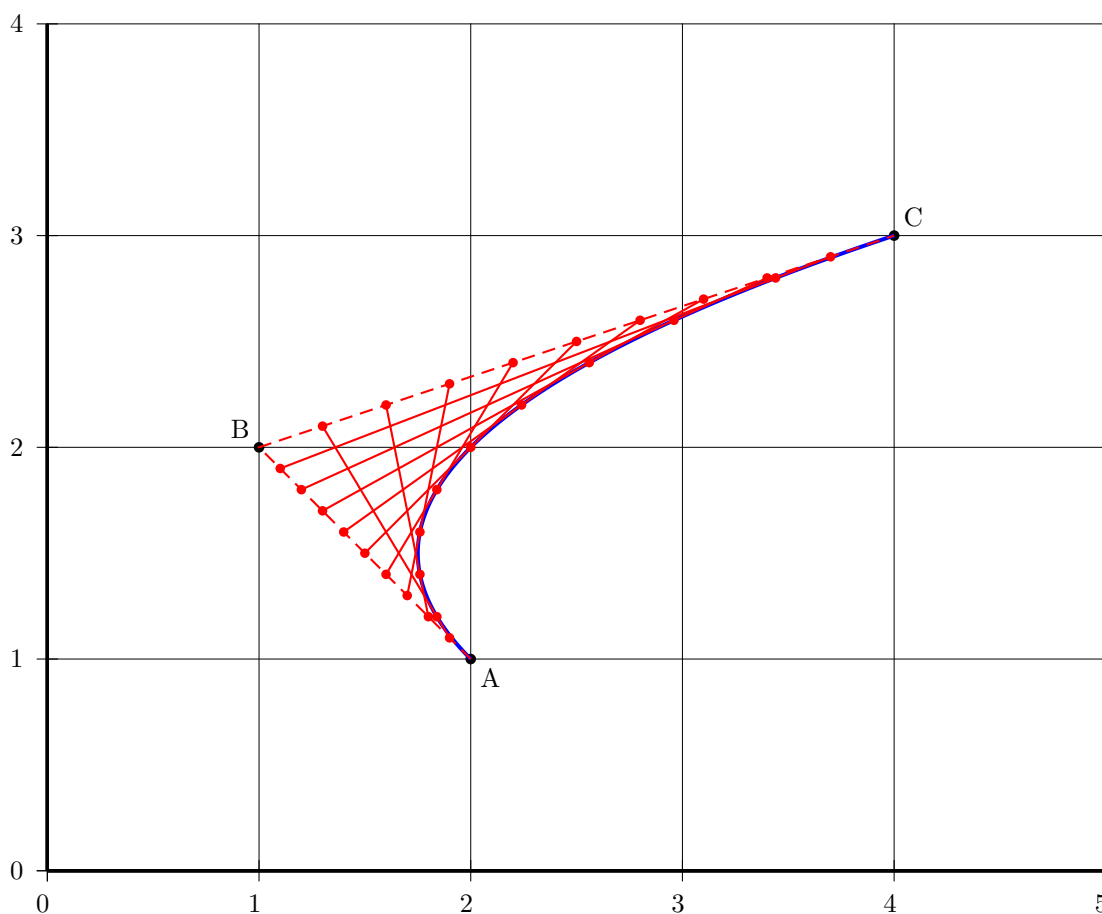
C'est la fonction `\pstHomO` du package `Euclide` qui a été utilisée pour tracer les barycentres.

```
\def\t{0.25}% valeur du paramètre t
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={180}]{A}{B}[I]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={90}]{B}{C}[J]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={0}]{I}{J}[M]
```



Au moyen d'un `\multido`, on peut tracer plusieurs triplets de points (I; J; M).

Pour que la figure reste compréhensible, j'ai retiré l'affichage des noms des points et agrandi un peu le dessin.



3 Courbe de Bézier à quatre points de contrôle

3.1 La théorie

On part de quatre points A, B, C et D, tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés. On va décrire la courbe de Bézier \mathcal{C} dont les quatre points de contrôle sont A, B, C et D. Pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$:

- on trace I le barycentre du système $\{A(1-t); B(t)\}$;
- on trace J le barycentre du système $\{B(1-t); C(t)\}$;
- on trace K le barycentre du système $\{C(1-t); D(t)\}$;
- on trace P le barycentre du système $\{I(1-t); J(t)\}$;
- on trace R le barycentre du système $\{J(1-t); K(t)\}$;
- on trace M le barycentre du système $\{P(1-t); R(t)\}$.

La courbe \mathcal{C} est l'ensemble des points M quand t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

3.2 Les calculs

3.2.1 Forme vectorielle

- Le point I est le barycentre du système $\{A(1-t); B(t)\}$ donc on a $(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}$.
- Le point J est le barycentre du système $\{B(1-t); C(t)\}$, donc $(1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.

- Le point K est le barycentre du système $\{C(1-t); D(t)\}$, donc $(1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK}$.
- Le point P est le barycentre du système $\{I(1-t); J(t)\}$, donc $(1-t)\overrightarrow{OI} + t\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OP}$.
- Le point R est le barycentre du système $\{J(1-t); K(t)\}$, donc $(1-t)\overrightarrow{OJ} + t\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OR}$.
- Le point M est le barycentre du système $\{P(1-t); R(t)\}$, donc $(1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM}$.

De ces égalités vectorielles on déduit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (1-t)\left((1-t)\overrightarrow{OI} + t\overrightarrow{OJ}\right) + t\left((1-t)\overrightarrow{OJ} + t\overrightarrow{OK}\right) \\ &= (1-t)^2\overrightarrow{OI} + 2t(1-t)\overrightarrow{OJ} + t^2\overrightarrow{OK} \\ &= (1-t)^2\left((1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) + 2t(1-t)\left((1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\right) + t^2\left((1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD}\right) \\ &= (1-t)^3\overrightarrow{OA} + t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 2t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 2t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)^3\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD} \end{aligned}$$

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B, C et D, est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^3\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD}$$

dans laquelle t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

3.2.2 Forme paramétrique

En décomposant selon les vecteurs de base, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (1-t)^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + t^2\overrightarrow{OC} \\ \iff \begin{cases} x &= (1-t)^3x_A + 3t(1-t)^2x_B + 3t^2(1-t)x_C + t^3x_D \\ y &= (1-t)^3y_A + 3t(1-t)^2y_B + 3t^2(1-t)y_C + t^3y_D \end{cases} \end{aligned}$$

La courbe de Bézier de points de contrôles A $(x_A; y_A)$, B $(x_B; y_B)$, C $(x_C; y_C)$ et D $(x_D; y_D)$, est l'ensemble des points M $(x(t); y(t))$ vérifiant le système

$$\begin{cases} x(t) &= (1-t)^3x_A + 3t(1-t)^2x_B + 3t^2(1-t)x_C + t^3x_D \\ y(t) &= (1-t)^3y_A + 3t(1-t)^2y_B + 3t^2(1-t)y_C + t^3y_D \end{cases}$$

dans lequel t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

3.2.3 Tangentes

Cas général

On a vu que, dans le cas général, la tangente à la courbe paramétrée représentant le point M $(x(t); y(t))$ en $t = t_0$ a pour équation $(y - y(t_0))x'(t_0) = ((x - x(t_0))y'(t_0)$.

$x(t) = (1-t)^3x_A + 3t(1-t)^2x_B + 3t^2(1-t)x_C + t^3x_D$ c'est-à-dire

$x(t) = (1-3t+3t^2-t^3)x_A + (3t-6t^2+3t^3)x_B + (3t^2-3t^3)x_C + t^3x_D$ donc

$x'(t) = (-3+6t-3t^2)x_A + (3-12t+0t^2)x_B + (6t-9t^2)x_C + 3t^2x_D$ ou encore

$x'(t) = (-3x_A + 9x_B - 9x_C + 3x_D)t^2 + (6x_A - 12x_B + 6x_C)t + (-3x_A + 3x_B)$.

De même $y'(t) = (-3y_A + 9y_B - 9y_C + 3y_D)t^2 + (6y_A - 12y_B + 6y_C)t + (-3y_A + 3y_B)$.

Ce qui donne pour équation de la tangente au point de la courbe correspondant à $t = t_0$

$$\begin{aligned} (y - y(t_0))\left((-3x_A + 9x_B - 9x_C + 3x_D)t_0^2 + (6x_A - 12x_B + 6x_C)t_0 + (-3x_A + 3x_B)\right) \\ = (x - x(t_0))\left((-3y_A + 9y_B - 9y_C + 3y_D)t_0^2 + (6y_A - 12y_B + 6y_C)t_0 + (-3y_A + 3y_B)\right). \end{aligned}$$

Tangente en A

Le point A correspond à la valeur 0 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 0$.

$x(t_0) = x(0) = x_A$ et $y(t_0) = y(0) = y_A$

L'équation de la tangente à la courbe en A est alors

$$(y - y_A)(-3x_A + 3x_B) = (x - x_A)(-3y_A + 3y_B).$$

Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en A passe par le point B car : $(y_B - y_A)(-3x_A + 3x_B) = (x_B - x_A)(-3y_A + 3y_B)$.

Tangente en D

Le point D correspond à la valeur 1 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 1$.

$$x(t_0) = x(1) = x_D \text{ et } y(t_0) = y(1) = y_D$$

L'équation de la tangente à la courbe en D est alors

$$\begin{aligned} (y - y_D)((-3x_A + 9x_B - 9x_C + 3x_D) + (6x_A - 12x_B + 6x_C) + (-3x_A + 3x_B)) \\ = (x - x_D)((-3y_A + 9y_B - 9y_C + 3y_D) + (6y_A - 12y_B + 6y_C) + (-3y_A + 3y_B)) \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$(y - y_D)(-3x_C + 3x_D) = (x - x_D)(-3y_C + 3y_D).$$

Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en D passe par le point C car : $(y_C - y_D)(-3x_C + 3x_D) = (x_C - x_D)(-3y_C + 3y_D)$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B, C et D a pour tangente en A la droite (AB) et pour tangente en D la droite (DC)..

3.3 Exemple

On prend A de coordonnées (3; 1), B de coordonnées (1; 1), C de coordonnées (2; 4) et D de coordonnées (5; 2), et on appelle \mathcal{C} la courbe de Bézier ayant A, B, C et D comme points de contrôle.

D'après ce qui a été vu précédemment, la représentation paramétrique de cette courbe est

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 3 + 3t(1-t)^2 \times 1 + 3t^2(1-t) \times 2 + t^3 \times 5 \\ y(t) = (1-t)^3 \times 1 + 3t(1-t)^2 \times 1 + 3t^2(1-t) \times 4 + t^3 \times 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = (1-3t+3t^2-t^3) \times 3 + (3t-6t^2+3t^3) \times 1 + (3t^2-3t^3) \times 2 + t^3 \times 5 \\ y(t) = (1-3t+3t^2-t^3) \times 1 + (3t-6t^2+3t^3) \times 1 + (3t^2-3t^3) \times 4 + t^3 \times 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = 3-9t+9t^2-3t^3+3t-6t^2+3t^3+6t^2-6t^3+5t^3 \\ y(t) = 1-3t+3t^2-t^3+3t-6t^2+3t^3+12t^2-12t^3+2t^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = -t^3+9t^2-6t+3 \\ y(t) = -8t^3+9t^2+1 \end{cases}$$

3.4 Graphiques

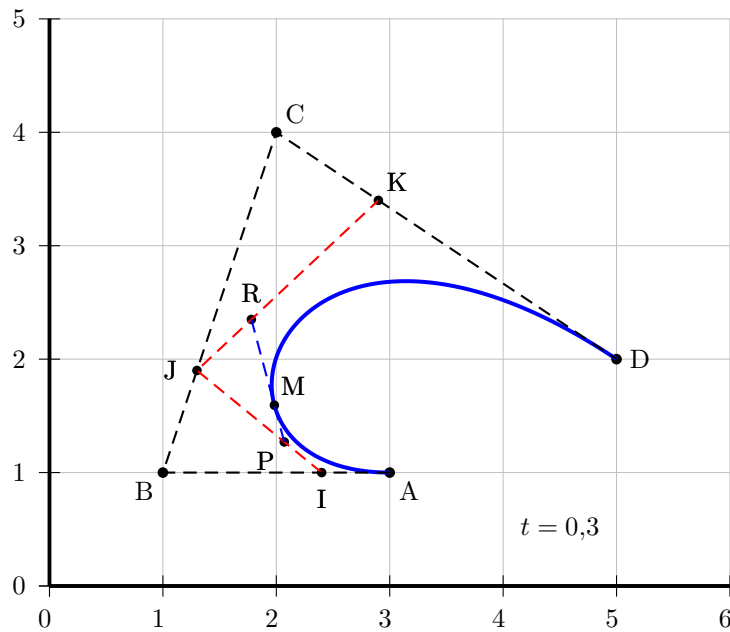
Comme précédemment, on définit les points avec l'instruction `\Cnode` :

```
\Cnode*(3,1){A} \Cnode*(1,1){B} \Cnode*(2,4){C} \Cnode*(5,2){D}
```

On a également tracé les barycentres I, J et K, puis P et R, puis M, pour une valeur de t définie dans le texte du graphique. On peut modifier la valeur de t pour obtenir d'autres positions des points.

Ces points sont, là aussi, tracés au moyen de l'instruction `\pstHom0` :

```
\def\t{0.3}
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=-90]{A}{B}[I]
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=180]{B}{C}[J]
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=45]{C}{D}[K]
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=-135]{I}{J}[P]
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=90]{J}{K}[R]
\pstHom0[HomCoef=\t,PosAngle=45]{P}{R}[M]
```



4 Exercice

Pour vous amuser, vous pouvez réaliser ce dessin en forme de « pique ». Les deux courbes en rouge sont des courbes de Bézier à 4 points de contrôle, les quatre en bleu sont des courbes de Bézier à 3 points de contrôle. Petite aide : tous les points de contrôle ont des coordonnées entières.

