

Quand on a à chercher une limite et qu'il y a une difficulté, il faut distinguer 2 cas :

- x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE
- x tend vers une valeur finie a : on met alors $x - a$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

EXERCICE 1

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} \quad D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} \quad \text{donc } f(x) = x \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}$$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)$ tend vers 1 et $\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Déterminer les limites de f en -2 et 2 .

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$$

Quand x tend vers -2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers -12 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe $x^2 - 4$ est une expression du second degré qui s'annule en -2 et 2

donc $x^2 - 4 > 0$ si $x < -2$ et $x^2 - 4 < 0$ si $-2 < x < 2$ donc 2 cas se présentent :

x tend vers -2 et $x < -2$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x^2 - 4 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x^3 - x - 6 = -12 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty \quad (\text{d'après la règle des signes})$$

x tend vers -2 et $-2 < x < 2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 - 4 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^3 - x - 6 = -12 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty \quad (\text{d'après la règle des signes})$$

on n'a pas à traiter le cas $x > 2$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -2 en restant plus grand que 2

Quand x tend vers 2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers 0 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc on a une forme indéterminée.

x tend vers une valeur finie 2 : on met alors $x - 2$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$x^3 - x - 6 = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c$$

donc par identification : $a = 1$; $-2a + b = 0$; $-2b + c = -1$ et $-2c = -6$

donc $a = 1$; $b = 2$ et $c = 3$

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$$

Quand x tend vers 2 alors $x^2 + 2x + 3$ tend vers 11 et $x + 2$ tend vers 4 donc $f(x)$ tend vers $\frac{11}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{11}{4}$$

EXERCICE 2

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8} \quad D_f =]-\infty; -8[\cup]-8; 1[\cup]1; +\infty[$$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}$$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$ tend vers 2 et $\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Déterminer les limites de f en -8 et 1 .

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$$

Quand x tend vers -8 alors :

$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 171 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0

donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en -8 et 1

donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$

donc 2 cas se présentent :

x tend vers -8 et $x < -8$

alors $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

x tend vers -8 et $-2 < x < 1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors

$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 0 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0

donc on a une forme indéterminée.

x tend vers une valeur finie 1 : on met alors $x - 1$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

$$x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{(x - 1)(2x - 3)}{(x - 1)(x + 8)} \text{ après simplification : } f(x) = \frac{2x - 3}{x + 8}$$

Quand x tend vers 1 alors $2x - 3$ tend vers -1 et $x + 8$ tend vers 9 donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{9}$ soit $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{9}$.

EXERCICE 3

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$$

$$D_f =]-\infty; -8[\cup]-8; 1[\cup]1; +\infty[$$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^2 \left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}$$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$ tend vers 2 et $\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = -2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = -2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Déterminer les limites de f en -8 et 1 .

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$$

Quand x tend vers -8 alors :

$-2x^2 + 5x + 3$ tend vers $-8,5$ et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0

donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en -8 et 1

donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$ et $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x > 1$

donc 2 cas se présentent :

x tend vers -8 et $x < -8$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5 \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x < -8}} f(x) = -\infty \text{ (d'après la règle des signes)}$$

x tend vers -8 et $-8 < x < 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors

$-2x^2 + 5x + 3$ tend vers $-8,5$ et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0

donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en -8 et 1 donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$ et $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x > 1$

donc 2 cas se présentent :

x tend vers 1 et $-8 < x < 1$

alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

x tend vers 1 et $x > 1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x < -8$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers 1 en restant plus petit que -8 .