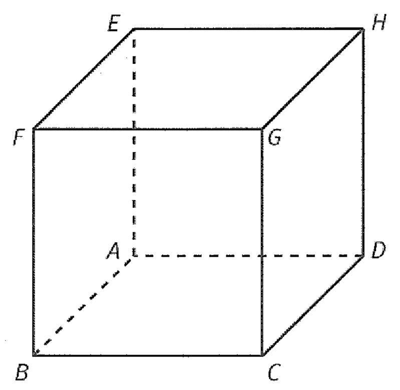
On considère le cube ABCDEFGH.
O est le centre du cané ABCD et I est le centre de gravité du triangle EBD.

Partie A

1. *a*. Montrer que A est le barycentre des points pondérés (E ; 1) (B ; 1) (G ; – 1) et (D ; 1).
b) En déduire que les points A I et G sont alignés.

2. Déterminer la section du cube par le plan (ODJ), J étant le point défini par $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, D, E, C, F, G et H.
2. Calculer les coordonnées du point O et celles de I.
3. Retrouver que les points A I et G sont alignés.
4. *a*. Calculer la distance AI.

Déterminer une équation de la sphère S de centre A passant par I. Le point O appartient-il à S?

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A (– 1 ; 0), B $(2 ; \sqrt{3})$, C $(2 ; -\sqrt{3})$ et D (3 ; 0).

1. Faire une figure.
2. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer la nature du triangle DAC.
4. Soit C l'ensemble des points M du plan tels que : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CD} = 12$

a. Montrer que D est le barycentre du système de points pondérés { (A ; – 1), (B ; 2), (C ; 2) }
b) Montrer que $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CD} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CD} = -4$.
c) Vérifier que le point A appartient à C.
d) Montrer que $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CD} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DC} = 0$.
e) En déduire l'ensemble C et le tracer.

CORRECTION

Partie A

1. *a*. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD}$

or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CG}$

de plus $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$; $1 + 1 - 1 + 1 \neq 0$ donc A est le barycentre de {(E ; 1) (B ; 1) (G ; – 1) (D ; 1)}

1. *b*. I est le centre de gravité du triangle EBD donc I est le barycentre de {(E ; 1) (B ; 1) (D ; 1)} donc $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ donc $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG}$

donc $3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$, les points A, I et G sont alignés.

2. La droite (OD) est contenue dans le plan (ABD) et dans le plan (ODJ) donc (OD) est l'intersection du plan (ODJ) et de la face (ABCD) du cube.

La droite (JD) est contenue dans le plan (ADE) et dans le plan (ODJ) donc (JD) est l'intersection du plan (ODJ) et de la face (ADEH) du cube.

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles donc le plan (ODJ) les coupe suivant deux droites parallèles.

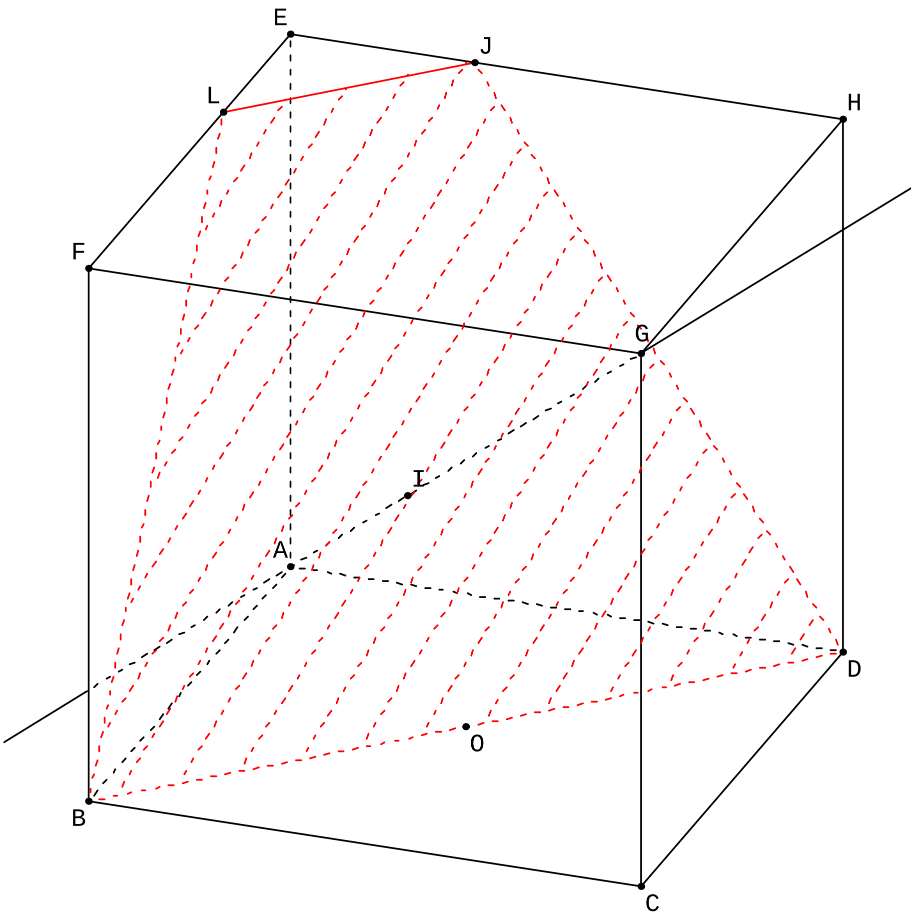
Le point J appartient au plan (EFG) et au plan (ODJ) donc l'intersection des plans (ODJ) et (EFG) est une droite passant par J parallèle à (BD), cette droite coupe (EF) en L

O est le centre du carré ABCD donc B appartient à (OD) donc aux plans (ODJ) et (ABF)

Le point L appartient au plan (ABF) et au plan (ODJ) donc l'intersection des plans (ODJ) et (ABF) est la droite (BL)

Partie B

1. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: A est le point de coordonnées (0,0,0) B est le point de coordonnées (1,0,0)
C est le point de coordonnées (1,1,0) D est le point de coordonnées (0,1,0) E est le point de coordonnées (0,0,1)
F est le point de coordonnées (1,0,1) G est le point de coordonnées (1,1,1) H est le point de coordonnées (0,1,1)



2. O est le milieu de [AC] donc O est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

I est le centre de gravité du triangle EBD donc I est le point de coordonnées $\left(\frac{x_E+x_B+x_D}{3};\frac{y_E+y_B+y_D}{3};\frac{y_E+y_B+y_D}{3}\right)$ soit $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3. $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1,1,1), $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ donc $3\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées (1,1,1), soit $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$, les points A, I et G sont alignés.

4. $AI^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ donc $AI = \frac{1}{\sqrt{3}}$

La sphère de centre A passant par I est l'ensemble des points M de l'espace tels que AM = AI ou encore $AM^2 = AI^2$

soit $\mathcal{S}$ a pour équation : $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{3}$

O est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ en remplaçant dans $x^2+y^2+z^2$ on obtient $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ et non $\frac{1}{3}$ donc O n'appartient pas à $\mathcal{S}$.