Nouvelle Calédonie Mars 2016

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4} m^2 x + (m-1) y + \frac{1}{2} m z - 3 = 0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A (1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$$

3. *a*. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
3. *b*. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
3. *c*. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.
4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \le m \le 10 \text{ et } -10 \le m' \le 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

4. *a*. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.
4. *b*. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\frac{m m'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$
4. *c*. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de −10 à 10 : Pour m' allant de −10 à 10 : Si $(m\,m')^2 + 16\,(m-1)\,(m'-1) + 4\,m\,m' = 0$ Alors Afficher $(m\,;\,m')$ Fin du Pour Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. *d*. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont (−4 ; 1), (0 ; 1) et (5 ; −4).

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

CORRECTION

1. Le point A (1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4} m^2 x_A + (m-1) y_A + \frac{1}{2} m z_A - 3 = 0$

soit $\frac{1}{4} m^2 + m - 1 + \frac{1}{2} m - 3 = 0$ donc $m^2 + 6m - 16 = 0$ soit $m = -8$ ou $m = 2$. A appartient aux plans P_{-8} et P_2.

2. Les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles (les coefficients de x ; y ; z ne sont pas proportionnels) donc ils sont sécants suivant une droite (d)

P_1 a pour équation $\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} z - 3 = 0$ soit $x + 2z - 12 = 0$

P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$

Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'intersection des plans P_1 et P_{-4}, en posant $z = t$ alors $x + 2t - 12 = 0$ et $4x - 5y - 2t - 3 = 0$

soit $x = -2t + 12$

en remplaçant : $-8t + 48 - 5y - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow -10t + 45 - 5y = 0$ donc $5y = 5(-2t + 9)$ donc $y = -2t + 9$

Les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique : $(d) \left\{ \begin{array}{l} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$

3. *a*. P_0 a pour équation : $-y - 3 = 0$ soit $y = -3$

Un point de (d) a pour coordonnées $(12 - 2t ; 9 - 2t ; t)$

Le point de (d) d'ordonnée 3 correspond au paramètre t tel que $9 - 2t = -3$ soit $t = 6$

Il s'agit donc du point B $(0 ; -3 ; 6)$. L'intersection entre P_0 et (d) est le point B.

3. *b*. Soit m un réel quelconque, P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2\,x + (m-1)\,y + \frac{1}{2}m\,z - 3 = 0$

$\frac{1}{4}m^2\,x_B + (m-1)\,y_B + \frac{1}{2}m\,z_B - 3 = (m-1)\times(-3) + \frac{1}{2}m\times 6 - 3 = -3m + 3 + 3m - 3 = 0$

Pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

3. *c*. S'il existait un point B' autre que B appartenant à P_m pour tout m, alors B' appartiendrait aussi à P_1 et P_{-4} donc à (d) et aussi à P_0 donc à l'intersection entre P_0 et (d) or l'intersection entre P_0 et (d) est le point B, donc B' n'existe pas.
Le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. *a*. Un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{n_1}$ (1 ; 0 ; 2), un vecteur normal à P_{-4} est $\overrightarrow{n_{-4}}$ (4 ; – 5 ; – 2)

$\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_{-4}} = 1\times 4 + 0\times(-5) + 2\times(-2) = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_{-4}}$ sont orthogonaux donc P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. *b*. Un vecteur normal à P_m est $\vec{n}\left(\frac{m^2}{4}\,;\,m-1\,;\,\frac{1}{2}m\right)$, un vecteur normal à $P_{m'}$ est $\vec{n}\left(\frac{m'^2}{4}\,;\,m'-1\,;\,\frac{1}{2}m'\right)$

les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}\,.\,\vec{n} = 0$ soit $\left(\frac{m\,m'}{4}\right)^2 + (m-1)\,(m'-1) + \frac{m\,m'}{4} = 0$

4. *c*. $\left(\frac{m\,m'}{4}\right)^2 + (m-1)\,(m'-1) + \frac{m\,m'}{4} = 0 \Leftrightarrow (m\,m')^2 + 16\,(m-1)\,(m'-1) + 4\,m\,m' = 0$

Cet algorithme détermine par balayages successifs, les différentes valeurs de m et m' telles que $\left(\frac{m\,m'}{4}\right)^2 + (m-1)\,(m'-1) + \frac{m\,m'}{4} = 0$

donc telles que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

4. *d*. Les nombres m et m' jouant des rôles symétriques, si (m ; m') est solution alors (m' ; m) est aussi solution donc les autres couples seront (1 ; – 4), (1 ; 0) et (– 4 ; 5).
Les six couples seront affichés dans cet ordre : (– 4 ; 1) ; (– 4 ; 5) ; (0 ; 1) ; (1 ; – 4) ; (1 ; 0) ; (5 ; – 4)