On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2 I_2$ ou I_2 est la matrice carré identité de taille 2.

1. *a*. Calculer N et N^2.
1. *b*. Montrer que pour tout entier naturel n on a $A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = 4 u_{n+1} - 4 u_n$.

2. *a*. Calculer u_2 et u_3

Pour tout entier n on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

2. *b*. Ecrire une relation matricielle entre V_{n+1}, V_n et A
2. *c*. Montrer que pour tout entier naturel n on a $V_n = A^n V_0$.
2. *d*. En déduire l'expression de u_n en fonction de n
3. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

CORRECTION

1. *a*. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

1. *b*. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N$.
$A^0 = I_2$ or si $n = 0$, $2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N = 2^0 I_2 + 0 \times 2^{-1} N = I_2 = A$
La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N$ alors $A^{n+1} = 2^{n+1} I_2 + (n+1)\, 2^n N$

$A^{n+1} = A^n \times A$ or $A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N$ et $N = A - 2 I_2$ donc $A = 2 I_2 + N$
donc $A^{n+1} = (2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N)(2 I_2 + N)$
$A^{n+1} = 2^n \times 2 I_2 \times I_2 + 2^{n-1} \times 2 I_2 \times N + n\, 2^{n-1} \times 2 N \times I_2 + n\, 2^{n-1} N \times N$
or $2^{n-1} \times 2 = 2^n$; $2^n \times 2 = 2^{n+1}$ et $I_2 \times I_2 = I_2$; $I_2 \times N = N$, $N \times I_2 = N$ et $N \times N = O_2$
$A^{n+1} = 2^{n+1} I_2 + 2^n N + n\, 2^n N$
$A^{n+1} = 2^{n+1} I_2 + (1+n)\, 2^n N$
La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N$

2. *a*. Si $n = 0$, la relation de récurrence devient : $u_2 = 4 u_1 - 4 u_0 = -4$
Si $n = 1$, la relation de récurrence devient : $u_3 = 4 u_2 - 4 u_1 = -20$

2. *b*. $A V_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -4 u_n + 4 u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = V_{n+1}$.

2. *c*. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $V_n = A^n V_0$.
$A^0 = I_2$ donc si $n = 0$, $A^n V_0 = V_0$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $V_n = A^n V_0$ alors $V_{n+1} = A^{n+1} V_0$.

$V_{n+1} = A V_n$ or $V_n = A^n V_0$ donc $V_{n+1} = A \times A^n V_0 = A^{n+1} V_0$

$V_{n+1} = A^{n+1} V_0$. La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

2. *d*. $V_n = A^n V_0$, il faut donc chercher l'expression de A^n en fonction de n

$A^n = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} N = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\, 2^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 n\, 2^{n-1} & n\, 2^{n-1} \\ -4 n\, 2^{n-1} & 2 n\, 2^{n-1} \end{pmatrix}$ or $2^{n-1} \times 2 = 2^n$ et $2^{n-1} \times 4 = 2^{n-1} \times 2^2 = 2^{n+1}$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n\, 2^n & n\, 2^{n-1} \\ -n\, 2^{n+1} & n\, 2^n \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n\, 2^n & n\, 2^{n-1} \\ -n\, 2^{n+1} & 2^n + n\, 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n (1-n) & n\, 2^{n-1} \\ -n\, 2^{n+1} & 2^n (1+n) \end{pmatrix}$

$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) & n\,2^{n-1} \\ -n\,2^{n+1} & 2^n(1+n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n)\times 2 + n\,2^{n-1} \\ -2\times n\,2^{n+1} + 2^n(1+n) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(4-4n+n)\,2^{n-1} \\ -4\times n\,2^n + 2^n(1+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-3n)\,2^{n-1} \\ (1-3n)\,2^n \end{pmatrix}$

$u_n = (4-3n)\,2^{n-1}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a\,d - b\,c \neq 0$

$0 \times 4 - 1 \times (-4) = 4$ donc A est inversible

L'inverse de A est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = I_2$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4b & a+4b \\ -4d & c+4d \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} -4b = 1 \\ a+4b = 0 \\ -4d = 0 \\ c+4d = 1 \end{cases}$

$-4b = 1$ donc $b = \dfrac{-1}{4}$, $a + 4b = 0$ donc $a = -4b = 1$

$-4d = 0$ donc $d = 0$, $c + 4d = 1$ donc $c = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a\,d - b\,c \neq 0$

$-2 \times 2 - 1 \times (-4) = 0$ donc N n'est pas inversible