Polynésie septembre 2015

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \text{i}$.

2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\text{e}^{\text{i}\theta}(1 - \text{i})$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}\cos(x) \text{ et } g(x) = \text{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques C_f, C_g et C_h des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :

a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

b. la position relative de C_f par rapport à Cg ;

c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes C_f et C_g est maximal.

2. Justifier que C_g est située au-dessus de C_f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes C_f et C_g.

4. *a.* On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, $h'(x) = \text{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$.

5. On admet que, sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, la fonction H définie par $\text{H}(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$ est une primitive de la fonction h.

On note D le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre (ng.mL^{-1}), d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang.

On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.

2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez-vous ?

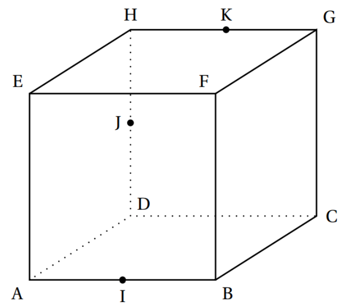
Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].

On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

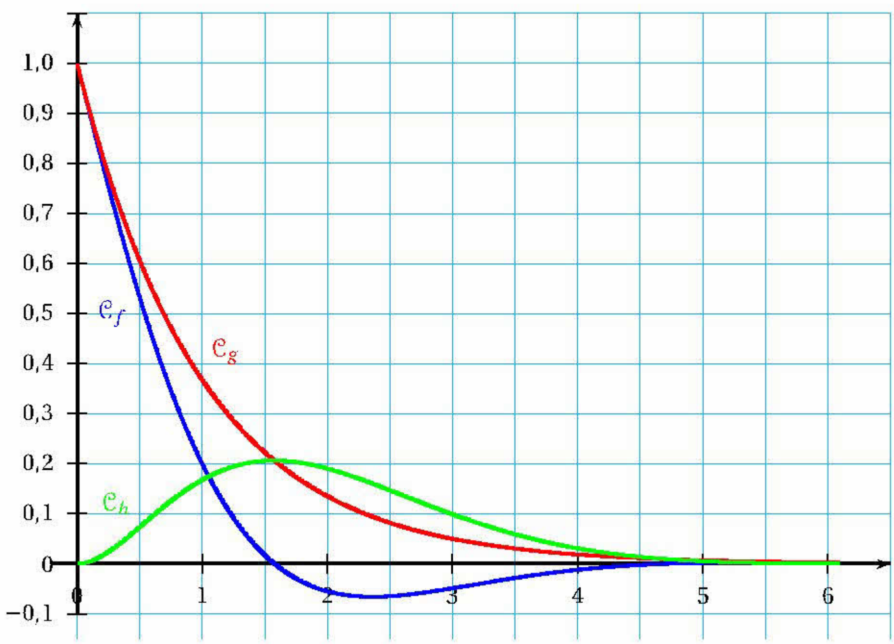
Pour tout entier naturel n non nul, on appelle S(n) le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.
1. Vérifier que S(6) = 12 et calculer S(7).
2. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) > 1 + n$.
b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?
3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
b. On considère la proposition suivante :

« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».

Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.
a. Quels sont les diviseurs de n ?
b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.
5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.
a. Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.
b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1-p^{14}}{1-p} \times \dfrac{1-q^8}{1-q}$.

Annexe

Exercice 1



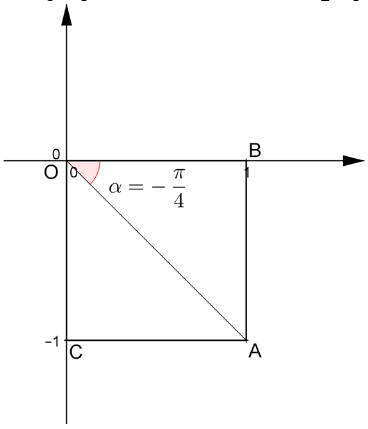
CORRECTION

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats
Partie A

1. $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $u = \sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

L'écriture exponentielle de $1 - u$ est $u = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Ce qui pouvait se déterminer graphiquement, le point A d'affixe $(1 - \mathrm{i})$ a pour coordonnées $(1\,;\,-1)$ donc est le sommet d'un carré :



donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -\dfrac{\pi}{4}$ et OA = $\sqrt{2}$ donc $u = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i}) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(1 - \mathrm{i}) = \cos\theta + \sin\theta + \mathrm{i}(\sin\theta - \cos\theta)$

Pour tout réel θ, la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$ est $\cos\theta + \sin\theta + \mathrm{i}(\sin\theta - \cos\theta)$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$

L'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$ est $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$

3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i}) = \cos\theta + \sin\theta + \mathrm{i}(\sin\theta - \cos\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$

donc $\cos\theta + \sin\theta + \mathrm{i}(\sin\theta - \cos\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

En égalant parties réelles et parties imaginaires :

$$\text{pour tout réel } \theta,\ \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \sin(\theta) - \cos(\theta) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Partie B

1. Graphiquement on peut conjecturer que :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (les deux courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote)

b. La courbe C_f est en dessous de Cg ;

c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes C_f et C_g est maximal est celle pour laquelle h admet un maximum soit environ 1,7.

2. Pour tout x réel, $-1 \le \cos x \le 1$, la fonction exponentielle est positive sur R donc en multipliant tous les termes de cette inégalité par e^{-x} : $-\mathrm{e}^{-x} \le \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \le \mathrm{e}^{-x}$ soit $f(x) \le g(x)$ donc C_g est située au-dessus de C_f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe C_g.

$-\mathrm{e}^{-x} \le f(x) \le \mathrm{e}^{-x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe C_f.

4. *a.* $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}$ donc $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x - \mathrm{e}^{-x}\sin x = -\mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x)$

$f'(x) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ d'après la **question 3**. de la **partie A**.

$h(x) = g(x) - f(x) = -\,e^{-x} + \sqrt{2}\,e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ donc, pour tout x de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, $h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.

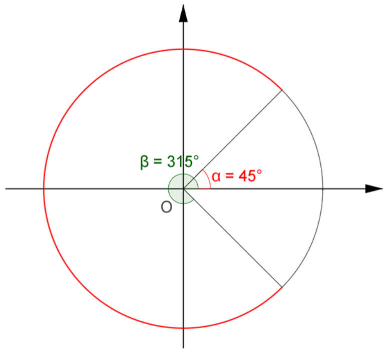
Pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ donc $1 \leq \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$

Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$

donc $-1 \leq \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.



Rappel :

$\frac{\pi}{4}$ radians correspond à 45 °

$\frac{7\pi}{4}$ radians correspond à 135 °

c. $h(0) = 0$; $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		2π
$f\,'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	$e^{-\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	0

5. La courbe de g est au-dessus de celle de f sur $[0\,;2\pi]$ donc $A = \int_0^{2\pi} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^{2\pi} h(x)\,dx$

$A = H(2\pi) - H(0) = \frac{1}{2}e^{-2\pi}[-2 + \cos(2\pi) - \sin(2\pi)] - \frac{1}{2}e^{-0}[-2 + \cos(0) - \sin(0)]$

$A = \frac{1}{2}e^{-2\pi}[-2 + 1 - 0] - \frac{1}{2}[-2 + 1 - 0]$

$A = -\frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$ *u. a.*

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $p = P(T > 60) \approx 0{,}0062$

2. Le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} donc μ' = 50

Soit $Z = \dfrac{T' - 50}{\sigma'}$, Z suit une loi normale centrée réduite

10 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1} donc $P(T' \leq 43) = 0{,}1$

soit $P\left(Z \leq \dfrac{43-50}{\sigma'} \right) = 0{,}1$ or $0{,}1 = P(Z \leq -1{,}28)$ donc $\dfrac{-7}{\sigma'} = -1{,}28$ soit $\sigma' = \dfrac{7}{1{,}28}$

$\sigma' \approx 5{,}46875$

Partie B

1. $P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M}) = 0{,}1 \times 0{,}82 + 0{,}9 \times 0{,}27 = 0{,}325$.

2. $P(\overline{D} \cap M) = 0{,}1 \times 0{,}18 = 0{,}018$

$P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{P(\overline{D} \cap M)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}018}{0{,}675} = \dfrac{2}{75}$ soit $P_{\overline{D}}(M) \approx 0{,}0267$

2,67 % des personnes ayant un dépistage négatif, sont malades.

3. $P_D(M) = \dfrac{P(D \cap M)}{P(D)} = \dfrac{0{,}082}{0{,}325} = \dfrac{82}{325}$ soit $P_D(M) \approx 0{,}2523$

Effectivement, il y a environ une chance sur quatre que le patient ait contracté la maladie sachant que son dépistage est positif.

Partie C

On a $n = 300$ et $p = 0{,}82$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 246$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1-p) = 54$ donc $n\,(1-p) \geq 5$.

Les conditions sont donc vérifiées pour déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique. Le seuil choisi sera de 95%

$I_{300} = \left[0{,}82 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}82 \times 0{,}18}{300}} ;\ 0{,}82 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}82 \times 0{,}18}{300}} \right]$ donc $I_{300} \approx [0{,}77 ; 0{,}87]$.

Or la fréquence observée quand les personnes ne sont pas à jeun est $f = 0{,}74$ donc $f \notin I_{300}$.

Ainsi ce dépistage ne peut pas, au risque de 5%, être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun.

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

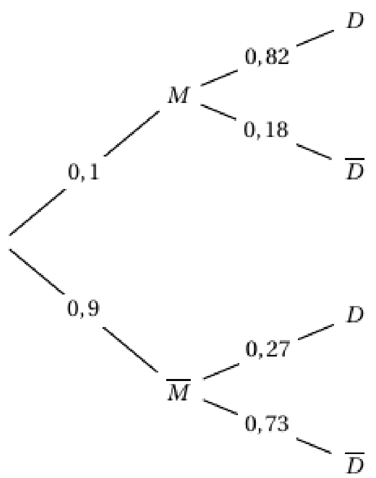
1. I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$, J $\left(0 ; 1 ; \dfrac{1}{2}\right)$, K$\left(\dfrac{1}{2} ; 1 ; 1\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{2} ; 1 ; \dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IK}\,(0 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{CE}\,(1 ; 1 ; -1)$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2} \times 1 + 1 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times (-1) = 0$ et $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non colinéaires du plan (IJK) donc le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2. $\overrightarrow{BD}\,(1 ; -1 ; 0)$ donc $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).



3. La droite (CE) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{CE}$

(CE) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Les plans (BDM) et (IJK) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{CE}$ est normal à (BDM).

$\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux

Par conséquent, les deux plans sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

soit si et seulement si $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-1) + y - z = 0$.

M a pour coordonnées $(t ; t ; -t + 1)$ donc en remplaçant : $t - 1 + t - (-t + 1) = 0$

soit $3\,t - 2 = 0$ donc $t = \dfrac{2}{3}$, M a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle S(n) le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. $6 = 2 \times 3$ donc les diviseurs de 6 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 donc S(6) = 12

Les diviseurs de 7 sont 1 et 7 donc S(7) = 8.

2. *a.* Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, 1 et n sont des diviseurs positifs de n donc $S(n) \geq n + 1$

b. $S(n) = n$ si et seulement si n admet pour seuls diviseurs positifs 1 et donc si et seulement si n est un nombre premier.

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Si p et q sont des nombres premiers distincts, $p \times q$ admet pour seuls diviseurs positifs 1 ; p ; q ; $p\,q$ donc

$S(n) = 1 + p + q + p\,q = 1 + p + q\,(1 + p) = (1 + p)\,(1 + q)$

b. Soit $n = 4$ et $m = 2$. Les diviseurs positifs de n sont 1, 2 et 4. Ainsi S(4) = 7. Puisque 2 est premier, S(2) = 3

Les diviseurs positifs de 8 sont 1, 2, 4 et 8, donc S(8) = 15.

Par conséquent $S(8) \neq S(4) \times S(2)$. La proposition faite est donc fausse.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. p est un nombre premier donc les diviseurs positifs de n sont 1 ; p ; p^2 ; … p^k.

b. $S(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

5. *a.* Soit m un diviseur de n.

Supposons que m soit divisible par un nombre premier d différent de p et q.

Puisque d divise m, il divise également n donc d divise $p \times q$, donc m divise soit p soit q. Ce qui est impossible car p et q sont deux nombres premiers différents de d.

m s'écrit sous la forme $p^s \times q^t$ où s et t sont des entiers naturels.

$n = p^{13} \times q^7$, donc $s \leq 13$ et $t \leq 7$.

Il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

Réciproquement supposons qu'il existe deux entiers naturels s et t, tels que $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$ tel que $m = p^s \times q^t$

Alors $n = p^{13} \times q^7 = p^s \times p^{13-s} \times q^t \times q^{7-t} = m \times p^{13-s} \times q^{7-t}$, $13 - s \geq 0$ et $7 - t \geq 0$ donc $p^{13-s} \times q^{7-t}$ est un entier naturel, m divise bien n.

b. $S(n) = 1 + p + p^2 + \ldots p^{13} + s\,(1 + p + p^2 + \ldots p^{13}) + s^2\,(1 + p + p^2 + \ldots p^{13}) + \ldots + s^7\,(1 + p + p^2 + \ldots p^{13})$

$S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p}\,(1 + s + s^2 + \ldots + s^7) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.