Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère :

- les plans ***P*** et ***P***' d'équations ***P*** : $x - y - z - 2 = 0$ et ***P***' : $x + y + 3z = 0$.
- la droite ***D*** ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1 : La droite ***D*** est orthogonale au plan ***P***.

Proposition 2 : La sphère *S* de centre O et de rayon 2 est tangente au plan ***P***.

Proposition 3 : L'intersection des plans ***P*** et ***P***' est la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}$; $t' \in \mathbb{R}$.

Proposition 4 : Les droites *D* et Δ sont coplanaires.

CORRECTION

Proposition 1 : VRAIE

Un vecteur normal au plan ***P*** est $\vec{n}(1 ; -1 ; -1)$, un vecteur directeur de ***D*** est $\vec{u}(-2 ; 2 ; 2)$, $\vec{u} = 2\vec{n}$ donc la droite ***D*** est orthogonale au plan ***P***.

Proposition 2 : FAUSSE

La distance de O à P est égale à $\dfrac{|0 - 0 - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, cette distance est inférieure au rayon de la sphère donc la sphère *S* de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan ***P***, le plan ***P*** coupe la sphère suivant un cercle.

Proposition 3 :VRAIE

Les plans ***P*** et ***P***' ne sont pas parallèles donc se coupent suivant une droite *d*.
Si $t = 0$, le point A de Δ a pour coordonnées (1 ; – 1 ; 0) ;
or $1 - (-1) - 0 - 2 = 0$ donc A ∈ ***P*** et $1 - 1 + 3 \times 0 = 0$ donc A ∈ ***P***'.
Si $t = 1$, le point B de Δ a pour coordonnées (0 ; – 3 ; 1) ;
or $0 - (-3) - 1 - 2 = 0$ donc B ∈ ***P*** et $0 - 3 + 3 \times 1 = 0$ donc B ∈ ***P***'.
L'intersection des plans ***P*** et ***P***' est la droite (AB) donc la droite Δ.

L'intersection des plans ***P*** et ***P***' est la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$.

Proposition 4 : FAUSSE

Un vecteur directeur de ***D*** est $\vec{u}(-2 ; 2 ; 2)$, un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}(-1 ; -2 ; 1)$, les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les droites *D* et Δ ne sont pas parallèles donc elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.

Cherchons s'il existe *t* et *t*' tels que $\begin{cases} x = -3 - 2t = 1 - t' \\ y = 2t = -1 - 2t' \\ z = 1 + 2t = t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2t + t' = 4 \\ 2t + 2t' = -1 \\ 2t - t' = 1 \end{cases}$$

La première condition et la troisième ne sont pas compatibles : $-2t + t' = 4$ et $2t - t' = 1 \Leftrightarrow 0 = 5$! donc le système n'a pas de solution, les droites *D* et Δ ne sont pas coplanaires.