Nouvelle Calédonie novembre 2007 (partiel)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x} - x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C). On a représenté sur la feuille annexe la courbe (C) et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.

3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie B

1. Déterminer graphiquement le signe de f.

2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$

4. *a.* En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

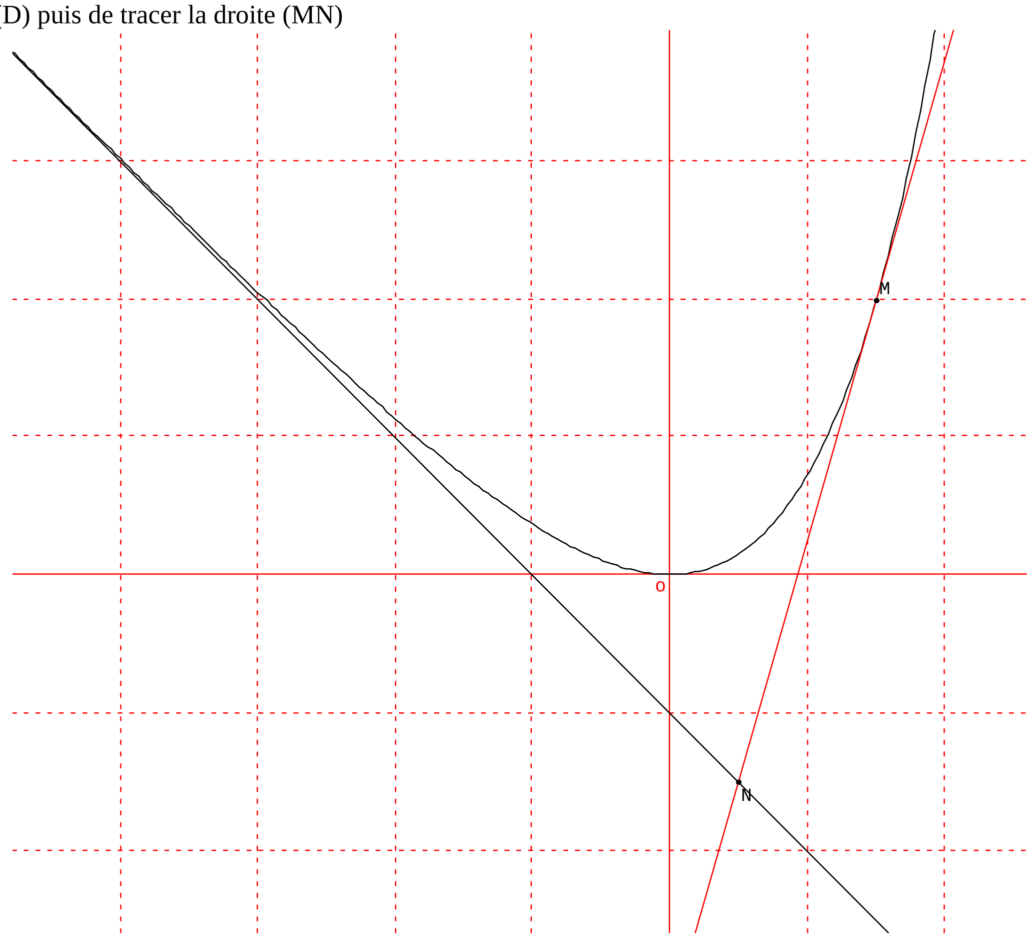
4. *b.* En déduire que $1{,}01^{100} \leq e \leq 1{,}01^{101}$

Correction

1. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est une droite de coefficient directeur $f'(a) = e^{a} - 1$
donc d'équation $y = (e^{a} - 1)\,x + p$
Cette droite passe par le point de (C) d'abscisse a donc de coordonnées (a ; $e^{a} - a - 1$) donc $e^{a} - a - 1 = a\,(e^{a} - 1) + p$
donc $p = e^{a} - a - 1 - a\,e^{a} + a$ soit $p = e^{a} - a\,e^{a} - 1$
La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = (e^{a} - 1)\,x + e^{a} - a\,e^{a} - 1$

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b.
N appartient à (T) donc $y_N = (e^{a} - 1)\,b + e^{a} - a\,e^{a} - 1$de plus N appartient à (D) donc $y_N = -b - 1$
donc $(e^{a} - 1)\,b + e^{a} - a\,e^{a} - 1 = -b - 1$ donc en isolant b : $b\,(e^{a} - 1) + b = a\,e^{a} - e^{a}$
soit $b\,e^{a} = (a - 1)\,e^{a}$ or la fonction exponentielle est strictement positive donc $e^{a} \neq 0$ donc $b = a - 1$ soit $b - a = -1$
donc N a pour coordonnées ($a - 1$; $-a$) donc N est le point de D d'abscisse $a - 1$

3. Pour tracer la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5, il suffit de placer le point M sur (C) et de placer le point N d'abscisse 0,5 sur (D) puis de tracer la droite (MN)



Partie B

1. Graphiquement $f(x) \geq 0$

2. Pour tout réel x , $f(x) \geq 0$ donc en particulier pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$ soit $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$

Pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{-1}{n+1}\right) \geq 0$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} - \frac{-1}{n+1} - 1 \geq 0$ soit $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$

3. $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ donc $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donc pour tout entier naturel non nul n : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$

4. *a.* $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ or $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} > 0$

soit en passant aux inverses $0 < e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$

donc $\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

4. *b.* Pour tout entier naturel n, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc pour $n = 100$ alors $1{,}01^{100} \leq e \leq 1{,}01^{101}$