Centres étrangers juin 2017

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 *g*, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leq 170) = 0{,}02$.

Question 1 :

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse *a* :	0,04	Réponse *b* :	0,96
Réponse *c* :	0,98	Réponse *d* :	On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.

Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.

Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 :

Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse *a* :	0,72	Réponse *b* :	0,28
Réponse *c* :	0,54	Réponse *d* :	On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.

Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 :

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse *a* :	0,02	Réponse *b* :	0,67
Réponse *c* :	0,44	Réponse *d* :	0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 :

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse *a* :	0,45	Réponse *b* :	1
Réponse *c* :	0,55	Réponse *d* :	On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 :

Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse *a* :	40	Réponse *b* :	400
Réponse *c* :	1600	Réponse *d* :	20

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t\,,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ et } d_2 \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \quad ,\ t' \in \mathbb{R}. \\ z = 5 \end{cases}$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A(2 ; 3 ; 0) appartient à la droite d_1.

2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.

Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}$ (1 ; − 2 ; − 3) est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.

On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5) .

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}$ (1 ; − 2 ; − 3), et passant par le point B (3 ; 3 ; 5).

a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\,e^{-0,1\,t}$, avec $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20$ µg.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,2 µg.L^{-1}.

Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en µg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à 200 µg.L^{-1}.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\,(e^{-0,1\,t} - e^{-t})$, avec $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0$ µg.L^{-1}.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, on a : $g'(t) = 20\,e^{-0,1\,t}(1 - 0,1\,e^{0,9\,t})$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)

En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 µg.L^{-1}.

On note un la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5\,u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20 µg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^{\,n}$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L^{-1}.

Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

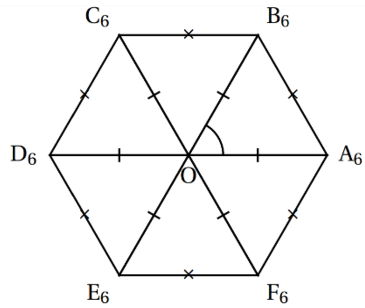
EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Pour tout entier $n > 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

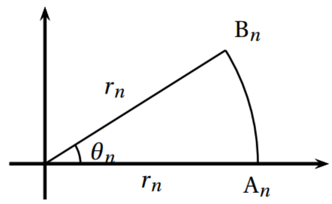
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.

On note alors $r_n = e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que : $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\pi[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante.

On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0{,}58$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

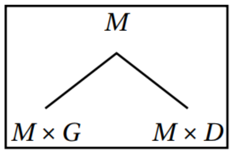
EXERCICE 4 5 points Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

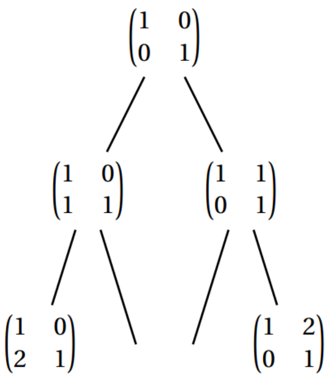
On considère les deux matrices G = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et D = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante :
de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices M × G (à gauche) et M × D (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice I = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern- Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$.

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\dfrac{3}{5}$.

3. Soit M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_{\text{M}} = a\,d - b\,c$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si $a\,d - b\,c = 1$, alors $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$.

b. En déduire que si M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_{\text{M}} = a\,d - b\,c = 1$, alors $\Delta_{\text{M} \times \text{G}} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice M × G est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{\text{M} \times \text{D}} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_{\text{N}} = 1$.

4. Déduire de la question précédente que toute fraction $\dfrac{m}{n}$ associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant.

```
VARIABLES :     m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
TRAITEMENT :    Tant que m ≠ n, faire
                        Si m < n
                                Afficher « Gauche »
                                n prend la valeur n – m
                        Sinon
                                Afficher « Droite »
                                m prend la valeur m – n
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		Gauche	...	...	...
m	4	...	...	...	...
n	7	...	...	...	...

b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Question 1 : réponse *b*.

Deux solutions possibles :

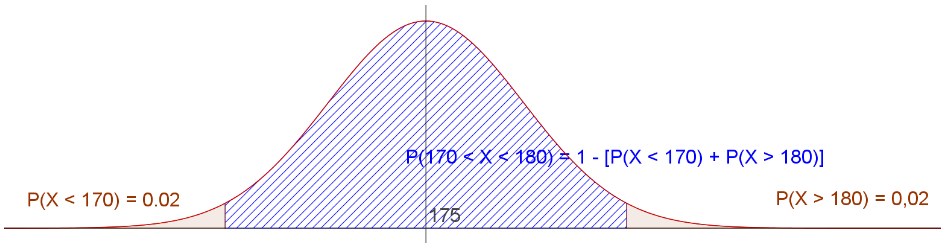
<u>Solution 1</u>

Soit $T = \dfrac{X - 175}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite.

P(X ≤ 170) = P $\left(T \leq \dfrac{170 - 175}{\sigma}\right)$ = 0,02 ⇔ $\dfrac{-5}{\sigma}$ = – 2,0537 ⇔ σ = $\dfrac{5}{2{,}0537}$ ⇔ σ = 2,435

P(170 ≤ X ≤ 180) = 0,95996

<u>Solution 2</u>



La fonction densité d'une loi normale est symétrique par rapport à la droite d'équation x = μ = 175

donc P(X ≤ 170) = P(X ≥ 180) = 0,02

P(170 ≤ X ≤ 180) = 1 – [P(X ≤ 170) + P(X > 180)] = 1 – [0,02 + 0,02] = 0,96

Question 2 : réponse *c*.

X suit une loi binomiale de paramètres (50 ; 0,05), P(X ≥ 2) = 1 – P(X ≤ 1) = 1 – 0,2794 = 0,7206 donc réponse *a*.

Question 3 :

P(D) = P(A ∩ D) + P(B ∩ D) = $\dfrac{1}{3} \times 0{,}05 + \dfrac{2}{3} \times 0{,}02 = 0{,}03$

$P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{2}{3} \times 0{,}02}{0{,}03} = \dfrac{4}{9}$ soit environ 0,44

Question 4 : réponse *a*

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors E(X) = $\dfrac{1}{\lambda}$ donc λ = $\dfrac{1}{500}$ = 0,002

P(X ≤ t) = 1 – $e^{-\lambda t}$ donc ici P(X ≤ 300) = 1 – $e^{-300 \times 0{,}002}$ soit environ 0,45

Question 5 : Réponse *c*

On utilise un intervalle de confiance I = $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} , f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ d'amplitude $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \dfrac{2}{0{,}05} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 40 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq 1600$

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. $d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$, donc le point de d_1 de paramètre $t = 0$ a pour coordonnées (2 ; 3 ; 0). Il s'agit du point A donc A $\in d_1$.

2. Un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 a pour coordonnées (1 ; – 1 ; 1)

Un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2 a pour coordonnées (2 ; 1 ; 0)

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles, ce que nous savions depuis le début : les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires donc ne peuvent pas être parallèles.

3. $\vec{v} . \overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + 1 \times (-3) = 0$

$\vec{v} . \overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. *a.* Soit le plan P' d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$

$5x_A + 4y_A - z_A - 22 = 5 \times 2 + 4 \times 3 - 22 = 0$ donc A $\in$ P'

Un vecteur normal au plan P' est le vecteur $\vec{n}$ (5 ; 4 ; – 1)

$\vec{n} . \overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$

$\vec{n} . \vec{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$ donc P' est le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$ donc P' = P.

Une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b. $5x_B + 4y_B - z_B - 22 = 5 \times 3 + 4 \times 3 - 5 - 22 = 0$ donc B $\in$ P

d_2 a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

Le point de d_2 de paramètre 4 a pour coordonnées (– 5 + 2 × 4 ; – 1 + 4 ; 5) soit (3 ; 3 ; 5) donc B est le point de d_2 de paramètre 4

$\vec{n} . \overrightarrow{u_2} = 5 \times 2 + 4 \times 1 + (-1) \times 0 \neq 0$ donc la droite d_2 n'est pas parallèle à P, elle est donc sécante à P.

B $\in$ P et B $\in d_2$ donc la droite d_2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5) .

5. *a.* Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3k \end{cases}$

b. Les vecteurs directeurs de d_1 et Δ ne sont pas colinéaires donc ces deux droites sont donc soit coplanaires (et donc sécantes) soit non coplanaires.

Cherchons leur point éventuel d'intersection.

$M \in d_1 \cap \Delta$ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - 2k \\ z = 5 - 3k \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2 + t = 3 + k \\ 3 - t = 3 - 2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + k \\ -t = -2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - k \\ t = 2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \\ t = 5 - 3k \end{cases}$

$5 - 3k = 5 - 3 = 2 = t$ donc les droites d_1 et Δ sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées (4 ; 1 ; 2)

c. $\overrightarrow{u_1} . \vec{v} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) - 3 \times 1 = 0$ donc d_1 et Δ sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{u_2} . \vec{v} = 1 \times 2 - 2 \times 1 - 3 \times 0 = 0$ donc d_2 et Δ sont orthogonales.

La droite d_2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5) or B $\in \Delta$, donc les droites d_2 et Δ sont sécantes.

La droite Δ est donc à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites donc répond au problème posé.

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Partie A : administration par voie intraveineuse

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale donc est égale à 10 µg.L^{-1}.

$f(t) = 10 \Leftrightarrow 20\,e^{-0,1\,t} = 10 \Leftrightarrow e^{-0,1\,t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,1\,t = \ln 0,5 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,5}{0,1} \Leftrightarrow t = -10\ln 0,5 \Leftrightarrow t_{0,5} \approx 7$ heures.

2. $f(t) \leq 0,2 \Leftrightarrow 20\,e^{-0,1\,t} \leq 0,2 \Leftrightarrow e^{-0,1\,t} \leq 0,01 \Leftrightarrow -0,1\,t \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow t \leq -\dfrac{\ln 0,01}{0,1} \Leftrightarrow t \leq -10\ln 0,01 \Leftrightarrow t \leq 46,1$ heures.

46,1 heure = 46 heures + 60 × 0,1 minutes donc 46 heures 6 minutes.

3. $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{20}{-0,1}\,e^{-0,1\,t}\right]_0^x = -200\,e^{-0,1\,x} + 200$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-0,1\,x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 200$, pour ce modèle, l'ASC est égal à 200 µg.L^{-1}.

Partie B : administration par voie orale

1. $g'(t) = 20\,(-0,1\,e^{-0,1\,t} + e^{-t}) = 20\,(-0,1\,e^{-t+0,9\,t} + e^{-t}) = 20\,(-0,1\,e^{-t} \times e^{0,9\,t} + e^{-t})$

Pour tout t de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, on a : $g'(t) = 20\,e^{-t}\,(1 - 0,1\,e^{0,9\,t})$.

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $g'(t)$ a le même signe que $1 - 0,1\,e^{0,9\,t}$

$1 - 0,1\,e^{0,9\,t} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0,1\,e^{0,9\,t} \Leftrightarrow 10 \geq e^{0,9\,t} \Leftrightarrow \ln 10 \geq 0,9\,t \Leftrightarrow t \leq \dfrac{\ln 10}{0,9}$.

t	0		$\dfrac{\ln 10}{0,9}$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

g admet un maximum en $\dfrac{\ln 10}{0,9}$.

$\dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,55$ soit 2 *h* et 0,55 × 60 minutes donc 2 *h* 33 min

La concentration plasmatique du médicament est maximale au bout de 2 *h* 33 min.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

1. **Initialisation :** Si $n = 1$: $40 - 40 \times 0,5^n = 40 - 40 \times 0,5^1 = 20 = u_1$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, si $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ alors $u_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$.

$u_{n+1} = 0,5\,u_n + 20 = 0,5\,(40 - 40 \times 0,5^n) + 20 = 20 - 40 \times 0,5 \times 0,5^n + 20$ donc $u_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2. $1 < 0,5 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 40$

3. $u_n \geq 38 \Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geq 38 \Leftrightarrow 40 \times 0,5^n \leq 2 \Leftrightarrow 0,5^n \leq \dfrac{0,2}{40} \Leftrightarrow n\ln 0,5 \leq \ln 0,05 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,5}$

$\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,5} \approx 4,32$ donc $n \geq 5$, donc il faut au moins 5 injections pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1. P_6 un polygone régulier à 6 côtés, de centre O, dont l'aire est égale à 1, il est constitué de 6 triangles superposables donc l'aire de chaque triangle est $\frac{1}{6}$ de l'aire totale du polygone donc le triangle OA_6B_6 a son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

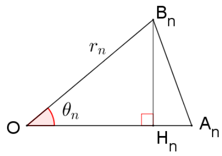
Les 6 triangles sont superposables donc l'angle $\widehat{A_6OB_6}$ a pour mesure $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et le triangle OA_6B_6 est isocèle en O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$, donc est équilatéral.

2. Le triangle OA_6B_6 est équilatéral donc $h_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,OA_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_6$.

3. L'aire du triangle OA_6B_6 est égale à $\frac{1}{6}$ donc $\frac{1}{2} h_6 r_6 = \frac{1}{6}$ soit $\frac{\sqrt{3}}{4} r_6^2 = \frac{1}{6}$ donc $r_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

$r_6 > 0$ donc $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec $n \geq 4$



1. $h_n = OA_n \sin(\theta_n) = r_n \sin(\theta_n)$ donc l'aire du triangle OA_nB_n est $\frac{1}{2} h_n r_n = \frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On a n triangles superposables donc $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ et $n\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n) = 1$ donc $n\frac{r_n^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1$

soit $r_n^2 = \frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$, $r_n > 0$ donc $r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\pi[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

1. Pour tout $n \geq 4$, on a : $n + 1 > n$ donc $\frac{n+1}{2\pi} > \frac{n}{2\pi} > 0$ donc $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n}$

$\frac{2\pi}{n} - \pi = \frac{2-n}{n}\pi$, $n \geq 4$ donc $2 - n < 0$ donc $\frac{2\pi}{n} - \pi < 0$ soit $\frac{2\pi}{n} < \pi$

$0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\pi[$. donc $f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

d'où $\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\pi[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ donc $f(x) \geq 0$

$0 \leq \frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ donc $\sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ soit $r_{n+1} < r_n$. La suite (r_n) est décroissante.

2. $r_n \geq 0$ et la suite (r_n) est décroissante donc la suite (r_n) converge.

3. Cet algorithme cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $r_n > 0{,}58$.
D'après la calculatrice, on obtient $r_{10} \approx 0{,}5833$ et $r_{11} \approx 0{,}5788$. L'algorithme affiche donc en sortie le nombre 11.

La question est légitime car $L \approx 0{,}5642$, la suite (r_n) est décroissante donc à partir d'un certain rang, $L \leq r_n \leq 0{,}58$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I} \times \mathrm{G} = \mathrm{G} \qquad\qquad \mathrm{I} \times \mathrm{D} = \mathrm{D}$$

$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{G} \times \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} \times \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} \times \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On associe à une matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$.

Le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale de l'arbre correspond à la matrice G × D × G, soit la matrice :

$\mathrm{G} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G} = \mathrm{G} \times (\mathrm{D} \times \mathrm{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ donc correspondant à la fraction $\dfrac{3}{5}$.

3. *a.* Si $a\,d - b\,c = 1$, alors $d\,(a + c) - c\,(b + d) = a\,d + d\,c - b\,c - d\,c = a\,d - b\,c = 1$.

b. $\mathrm{M} \times \mathrm{G} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$ donc $\Delta_{\mathrm{M} \times \mathrm{G}} = d\,(a + c) - c\,(b + d)$

Si $\Delta_{\mathrm{M}} = a\,d - b\,c = 1$, alors $a\,d - b\,c = 1$, donc $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$ soit $\Delta_{\mathrm{M} \times \mathrm{G}} = 1$,

4. Une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot associée à la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ vérifie $a\,d - b\,c = 1$ et vérifie aussi, d'après les questions précédentes, $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$.

Il existe donc deux entiers c et d tels que $d\,(a + c) - c\,(b + d) = 1$

D'après le théorème de Bézout, les nombres $a + c$ et $b + d$ sont premiers entre eux, donc que la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5. *a.*

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

b. Cet algorithme donne le chemin permettant d'obtenir la matrice de Stern-Brocot associée à la fraction irréductible $\dfrac{m}{n}$.

D'après les résultats précédents $\mathrm{G} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{G} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ correspond à la fraction $\dfrac{4}{7}$.

En reprenant les résultats du tableau,

	Droite	Gauche	Gauche
4	1	1	1
3	3	2	1

La matrice D × G × G correspond à la fraction $\dfrac{4}{3}$,

	Gauche	Gauche
1	1	1
3	2	1

La matrice G × G correspond à la fraction $\dfrac{1}{3}$,

	Gauche
1	1
2	1

La matrice G correspond à la fraction $\dfrac{1}{2}$.